

# TMF 2023/24

## Úloha 6

Dalibor Repčák, Martin Kempa



### Non-contact Resistance

The responses of a LRC circuit driven by an AC source can be changed by inserting either a non-magnetic metal rod or a ferromagnetic rod into the inductor coil. How can we obtain the magnetic and electric properties of the inserted rod from the circuit's responses?

### Nekontaktní odpor

Odezva RLC obvodu napájeného střídavým zdrojem se může změnit vložením buď nemagnetické kovové tyčky, anebo feromagnetické tyčky do indukční cívky. Jak můžeme určit magnetické a elektrické vlastnosti vložené tyčky z odezvy obvodu?

# RLC obvod

je analogový **oscilační** elektrický obvod složený z

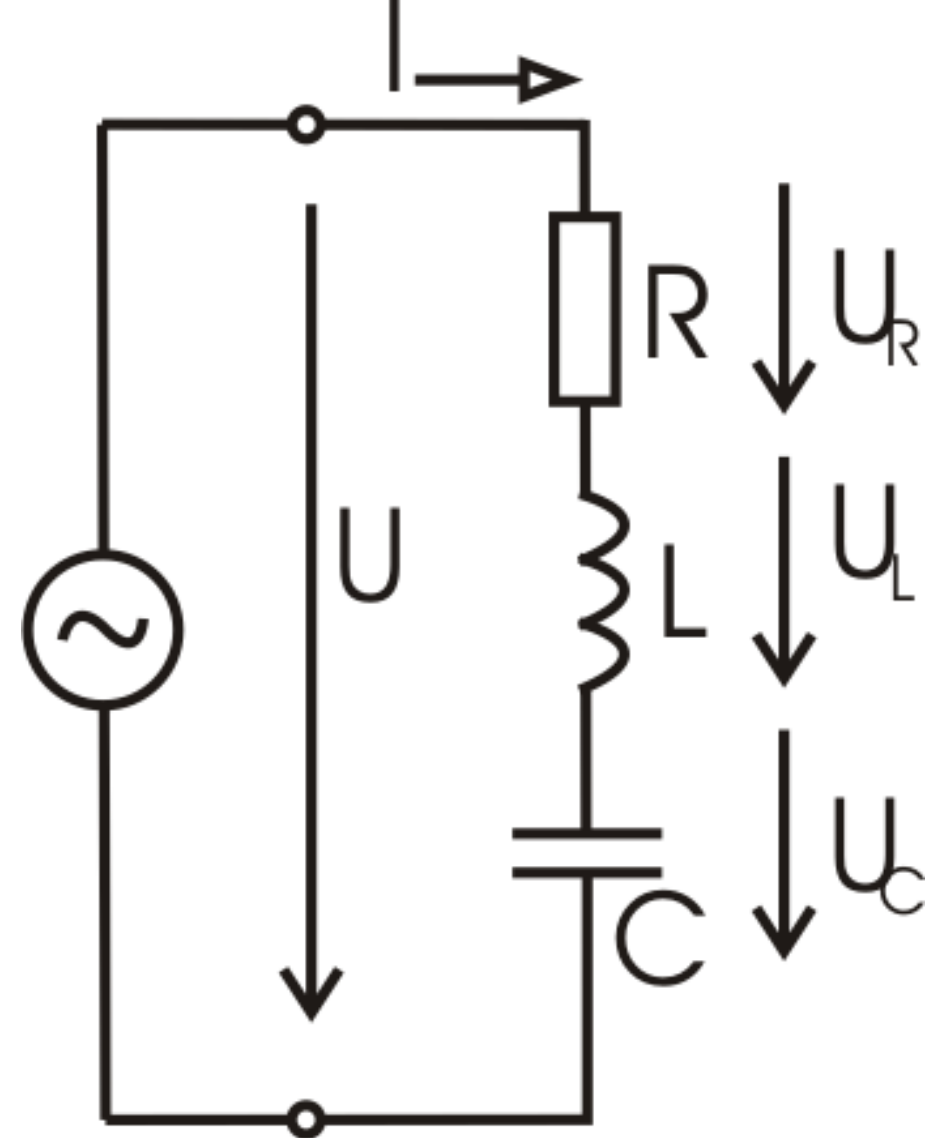
- rezistoru  $R$
- cívky  $L$
- kondenzátoru  $C$

spojených **paralelně**, nebo **sériově** (dále **sériově**)

- energie v obvodu se periodicky přeměňuje na napětí kapacity a proud indukce
- v cívce se opakovaně vytváří a zaniká magnetické pole
- kondenzátor se ve střídavém obvodu periodicky nabíjí a vybíjí
- odporem je dáno tlumení
- zdroj střídavého ( $\sim$ ) napětí (tvrdý / měkký) (stejnoseměrným bychom měřili jen  $R$ )
- voltmetr (osciloskop)

Tyčka (jádro cívky):

- kovová nemagnetická (měď, hliník, dural, ...)
- feromagnetická (ferit, ocel, ...)



**Rezonance:**  
při určité frekvenci  $f$  se vyrovná vliv  $L$  a  $C$

# Rezistor



vhodný 😊

reálné součástky

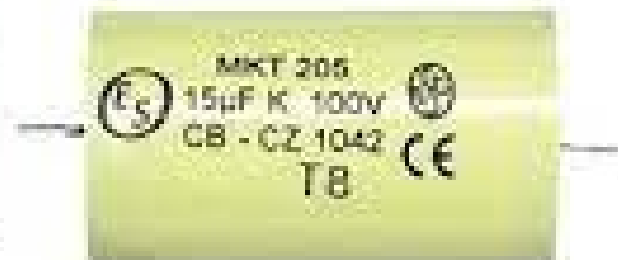
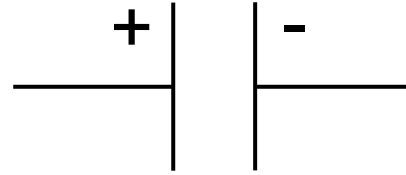
# Kondenzátor

např:

100 nF

4M5

! ne elektrolytický



# Cívka



např:

80 mH, 2 H

s jádrem 10-15 H

! R ~ kOhm

## Trocha teorie

$$I = I_{max} e^{i\omega t}$$

$$U = U_{max} e^{i(\omega t + \varphi)}$$

$$Z = \frac{U_{max}}{I_{max}} e^{i\varphi}$$

$$Z = R + iX$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}$$

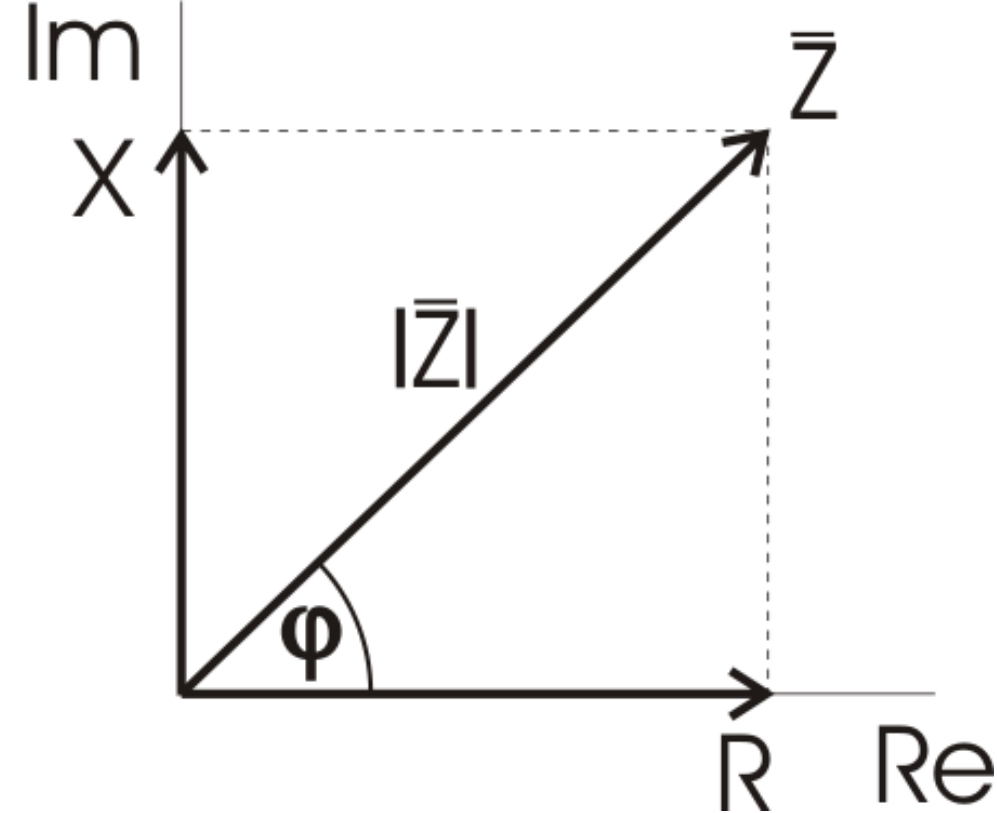
$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}$$

$$(\omega = 2\pi f)$$

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{X}{R}$$

$$U_L = L \frac{dI}{dt}$$

$$U_C = \frac{1}{C} \int I dt$$



$Z$  ... impedance (brání průchodu elektrického proudu)

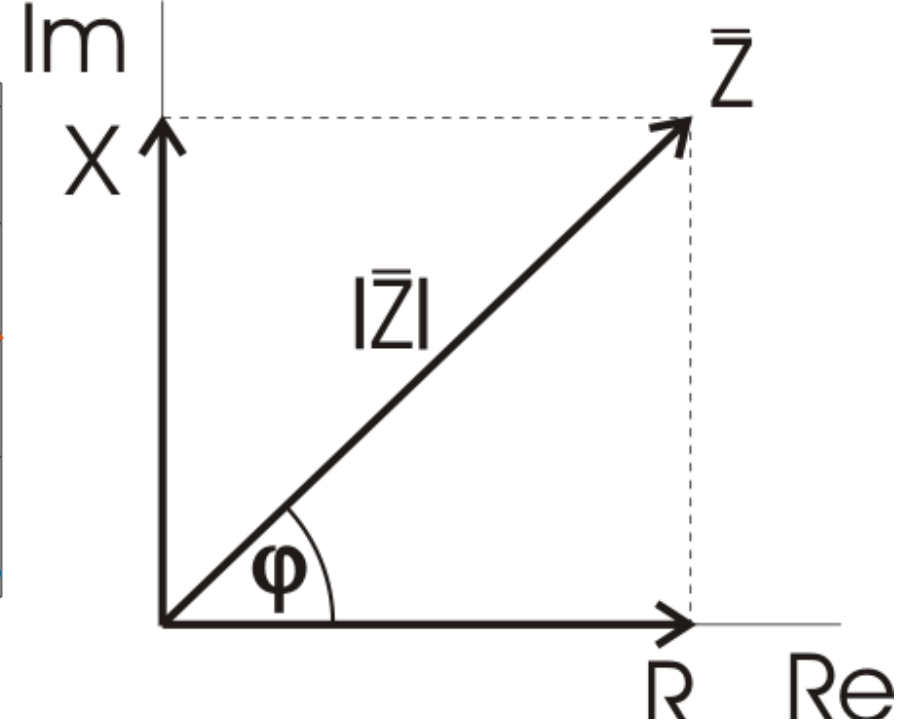
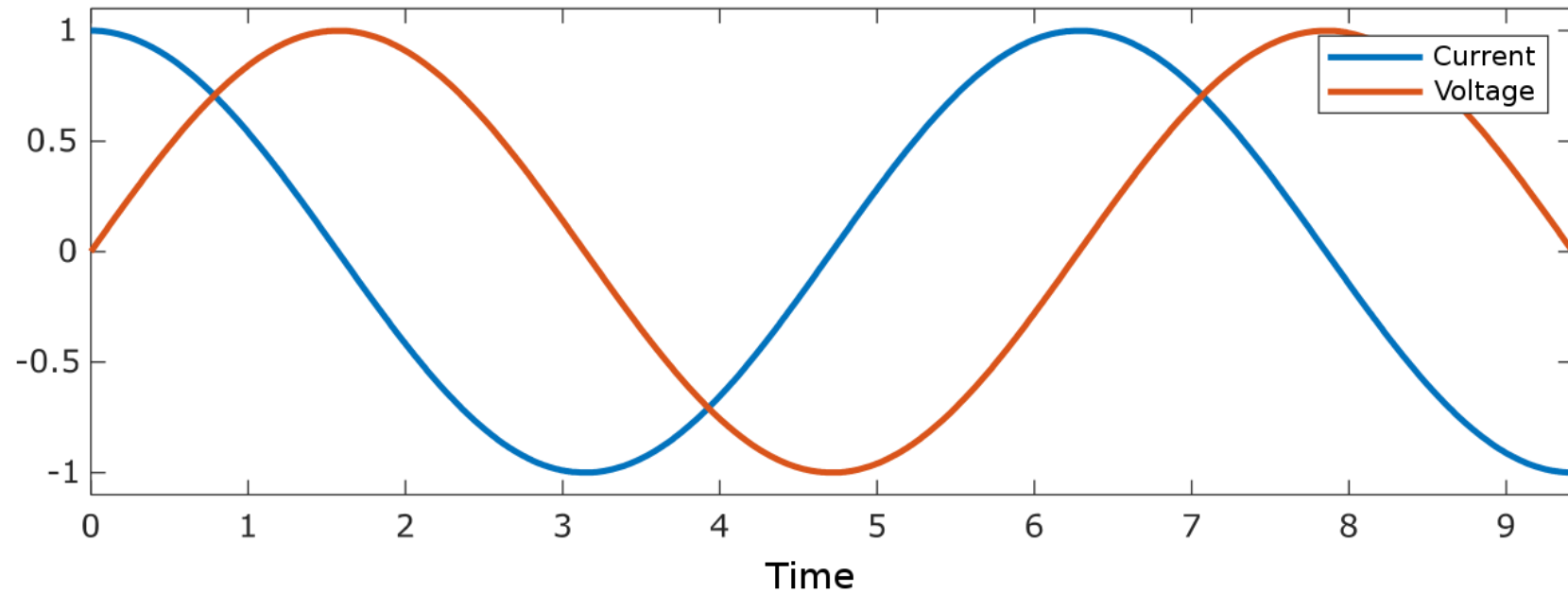
$R$  ... (ohmický) odpor (tepelné ztráty)

$X$  ... reaktance (jalový odpor)

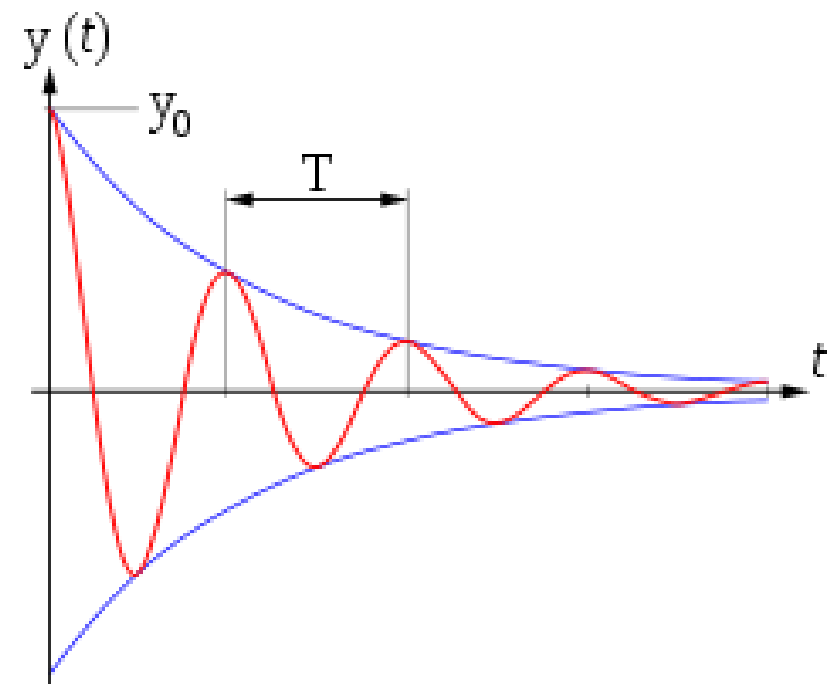
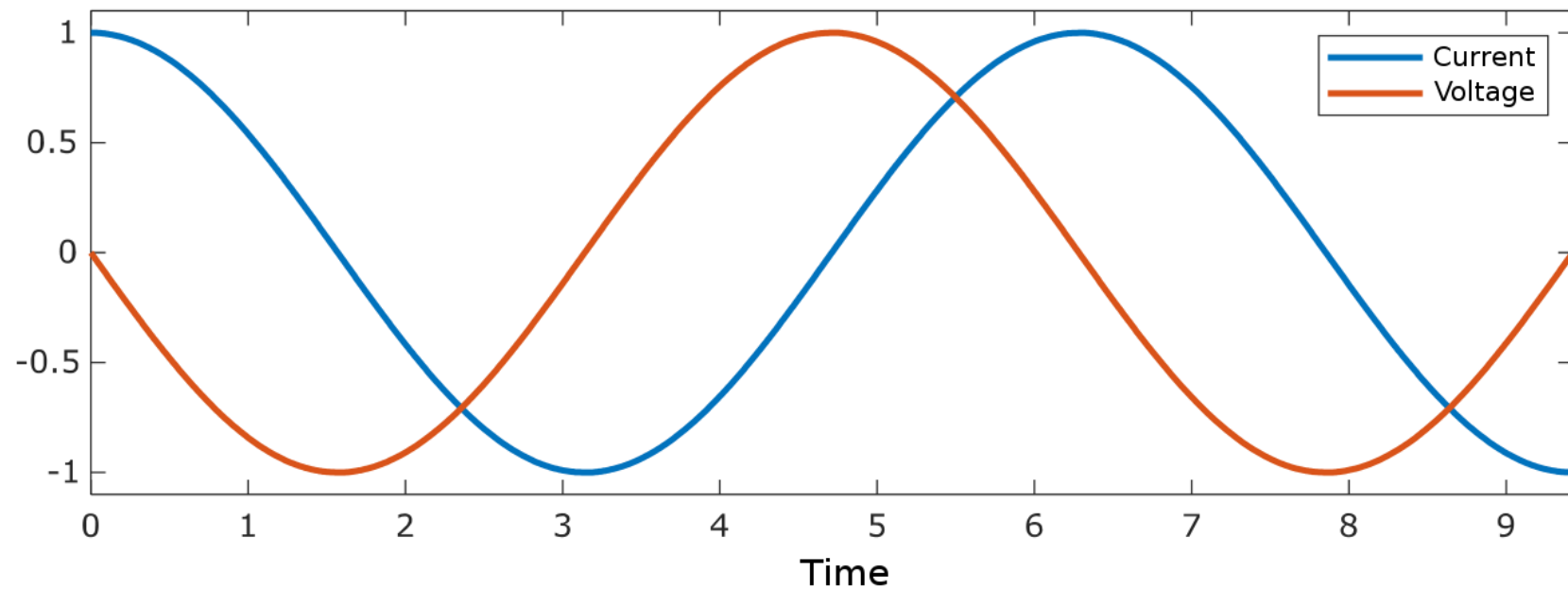
$\varphi$  ... fázový posun  $U$  vůči  $I$

$$[e^{ix} \sim \sin(x)]$$

### Capacitor V - I phase relationship



### Inductor V - I phase relationship



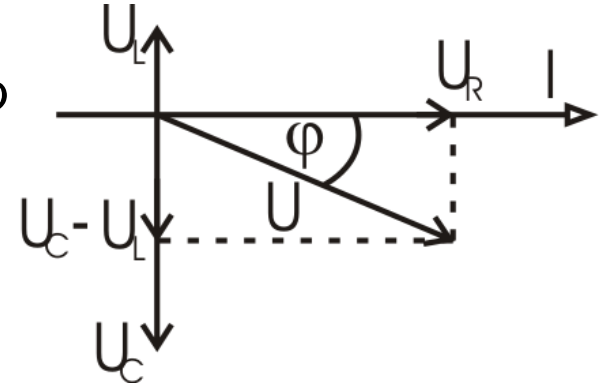
# Rezonance

- při určité frekvenci  $f$  se vyrovná vliv  $L$  a  $C$

$$\omega L \text{ vs. } \frac{1}{\omega C}$$

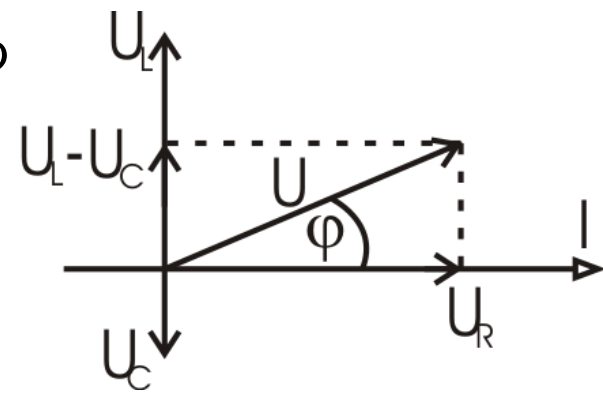
- $X_L < X_C: U_L < U_C; f < f_r$

RLC obvod má kapacitní charakter  
proud v obvodu předbíhá napětí o úhel  $\varphi$



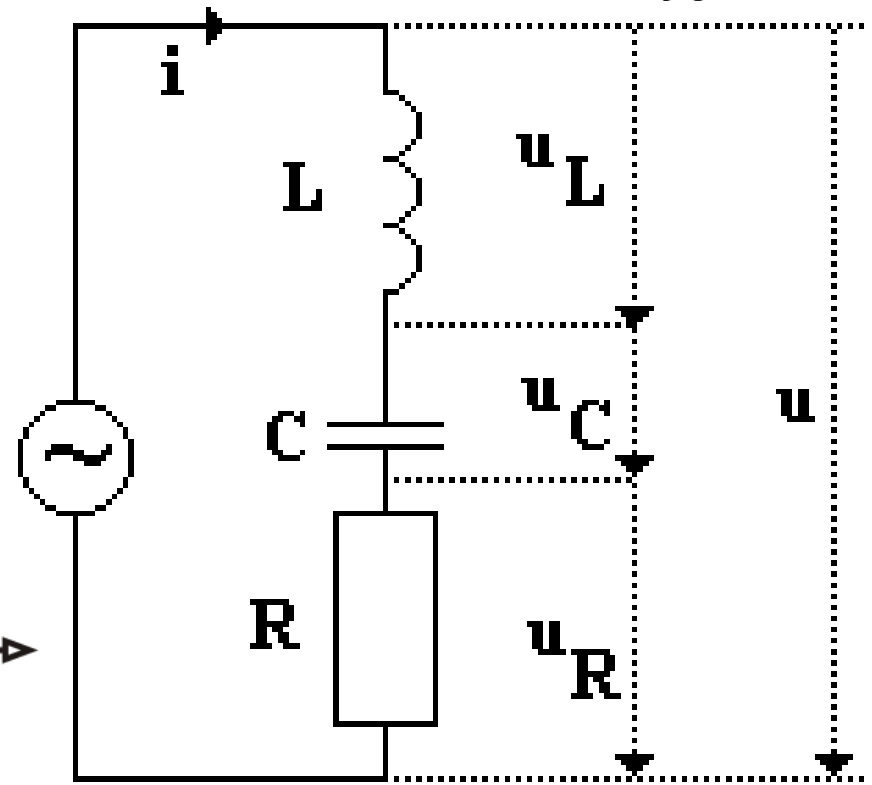
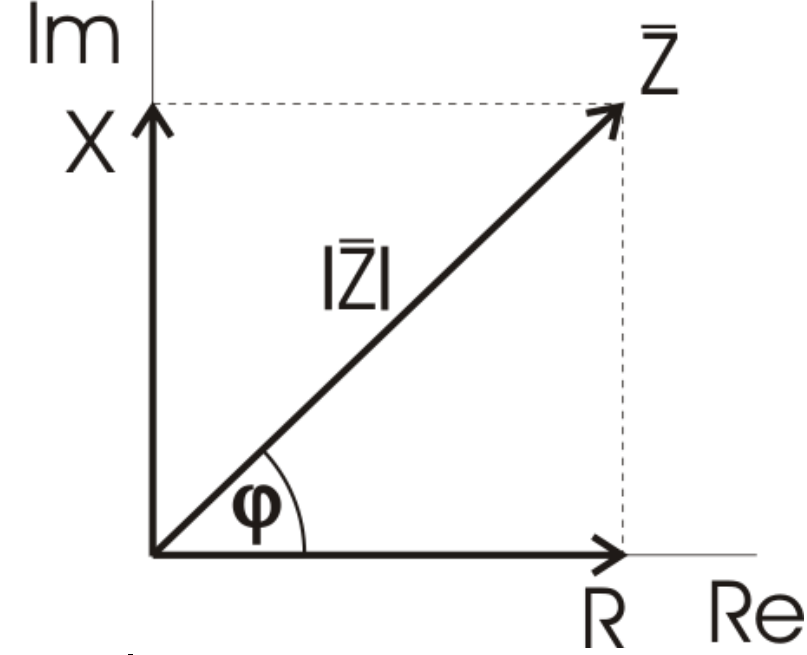
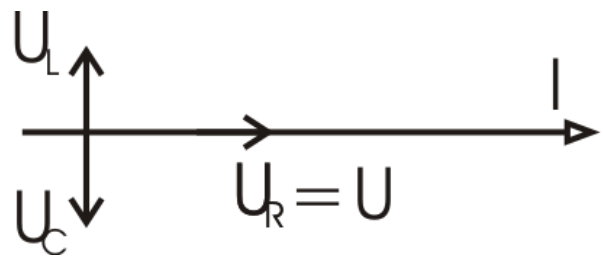
- $X_L > X_C: U_L > U_C; ; f > f_r$

RLC obvod má indukční charakter  
napětí v obvodu předbíhá proud o úhel  $\varphi$



- $X_L = X_C:$

RLC obvod je v rezonanci  
→ nastává při rezonanční frekvenci ;  $f = f_r$   
 $\varphi = 0$



# Rezonance

- při určité frekvenci  $f$  se vyrovná vliv  $L$  a  $C$
- $U$  a  $I$  jsou ve fázi:

$$\varphi = 0 \Rightarrow X = 0$$

$$i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = 0$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

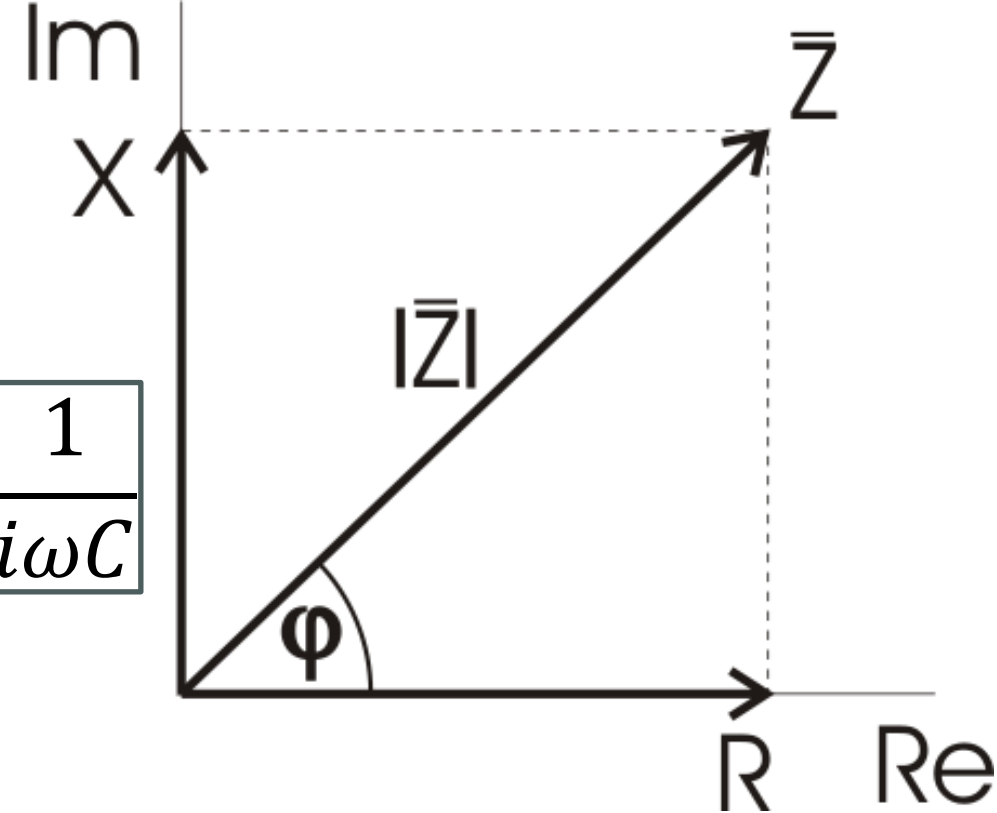
$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$Z = R + iX$$

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}$$

$$(\omega = 2\pi f)$$

$$\operatorname{tg}(\varphi) = \frac{X}{R}$$



$Z$  ... impedance (brání průchodu elektrického proudu)

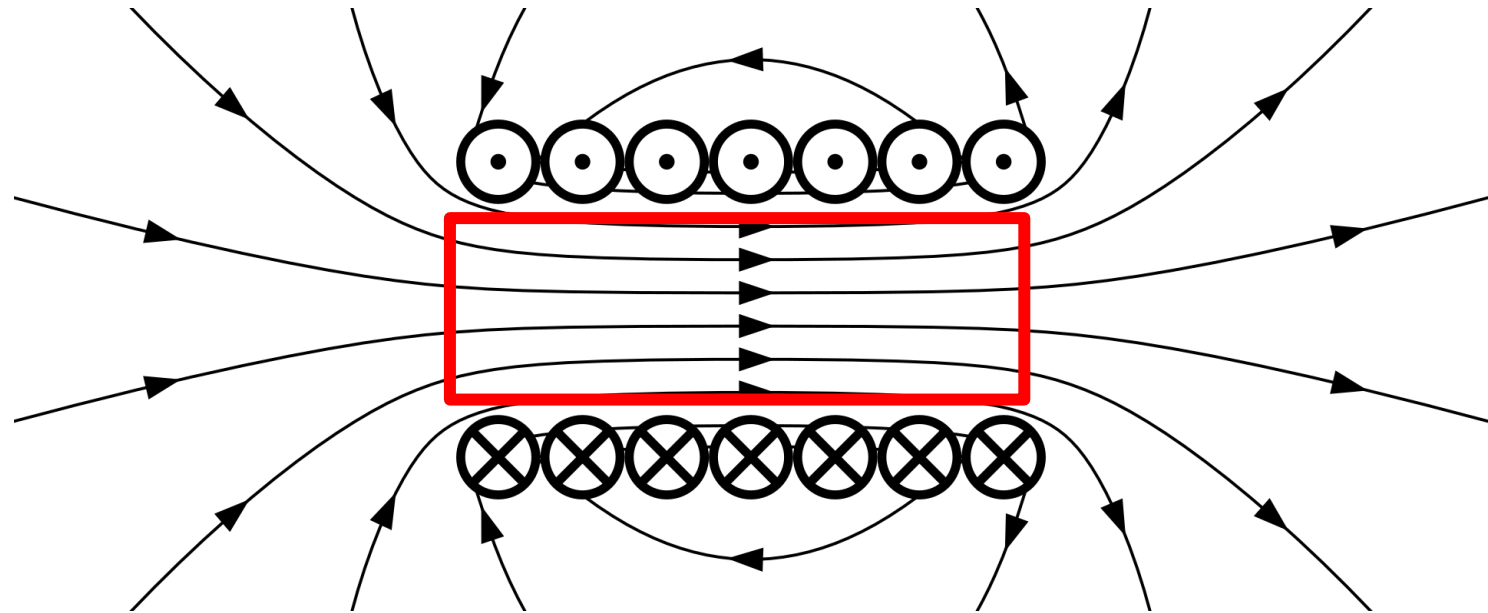
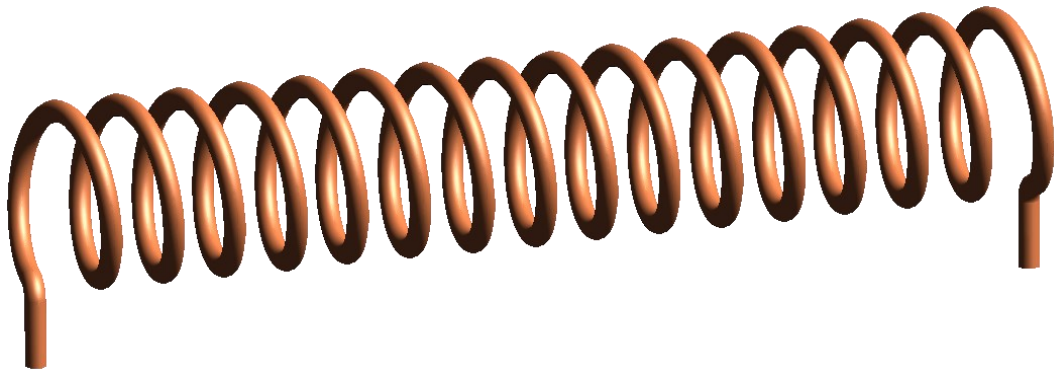
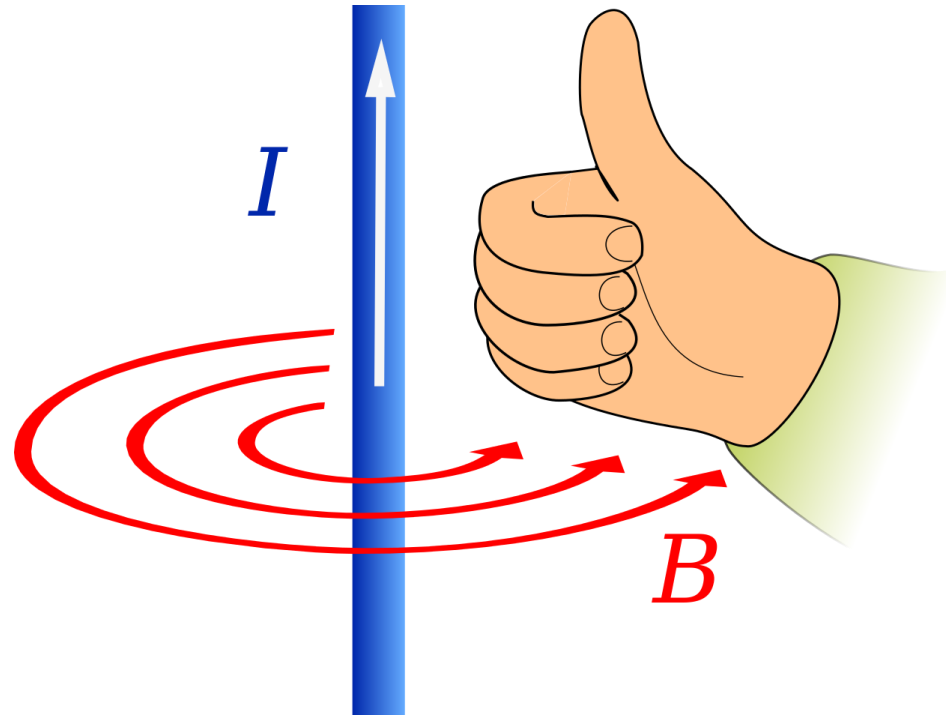
$R$  ... (ohmický) odpor (tepelné ztráty)

$X$  ... reaktance (jalový odpor)

$\varphi$  ... fázový posun  $U$  vůči  $I$

# Cívka

- el. proud ve vodiči  
→ mag. pole
- ideální solenoid je nekonečný  
→ korekce ...





# Indukčnost cívky

$$L = N_l^2 \mu_0 dkS \mu_r$$

$$L_0 = N_l^2 \mu_0 dkS \cdot 1$$

$$\mu_r = \frac{L}{L_0}$$

$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \rightarrow \mu_r = \frac{f_0^2}{f_j^2}$$

- ferit, železo:  $\mu_r \triangleq 10 \pm 2 (>> 100)$
- dural:  $\mu_r \triangleq 0,8 \pm 0,2 (\sim 1)$
- oprava na vzduch? ( $S\mu_r$ )  
jádro nezaplňuje zcela

$N_l$  ... hustota závitů  
 $\mu_0$  ... permeabilita vakua,  
 $l$  ... délka cívky  
 $S$  ... průřez cívky  
 $\mu_r$  ... relativní permeabilita  
 $k$  ... geometrický faktor

- diamagnet:  $\mu_r \leq 1$  (Cu)
- paramagnet:  $\mu_r \geq 1$  (Al)
- feromagnet:  $\mu_r \gg 1$  (Fe)

- **$k$  se mění po vložení jádra**
- **Demagnetizace**



# Demagnetizační pole

$$\mu = \mu_0 \mu_r = \frac{B}{H}$$

$$H_{int} = H_{ext} - NM$$

$$\chi_{měř} = \frac{\chi_{skut}}{1 + N\chi_{skut}}$$

$$\chi_{skut} = \frac{\chi_{měř}}{1 - N\chi_{měř}}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

$$(1 + \chi_m) = \mu_r$$

$$M$$

$$\chi_m = \frac{M}{H}$$

Volně podle poznámek prof. Pavla:

- *k* s jádrem se až  $\mu_r$ -krát může lišit
- zkoušet materiál s relativně malou  $\mu_r$
- analogicky velká  $\mu_r$ , ale malé *S* (drát)
- nespoléhat na dostupné cívky, navinout si vlastní podle potřeby

B ... magnetická indukce

H ... intenzita mag. pole

M ... magnetizace

N ... demagnetizační faktor

# Demagnetizační pole

$$\chi_{skut} = \frac{\chi_{m\check{r}}}{1 - N\chi_{m\check{r}}}$$

$$\mu_{skut} = \frac{\mu_{m\check{r}} - 1}{1 - N(\mu_{m\check{r}} - 1)}$$

- Toroid:  $N = 0$

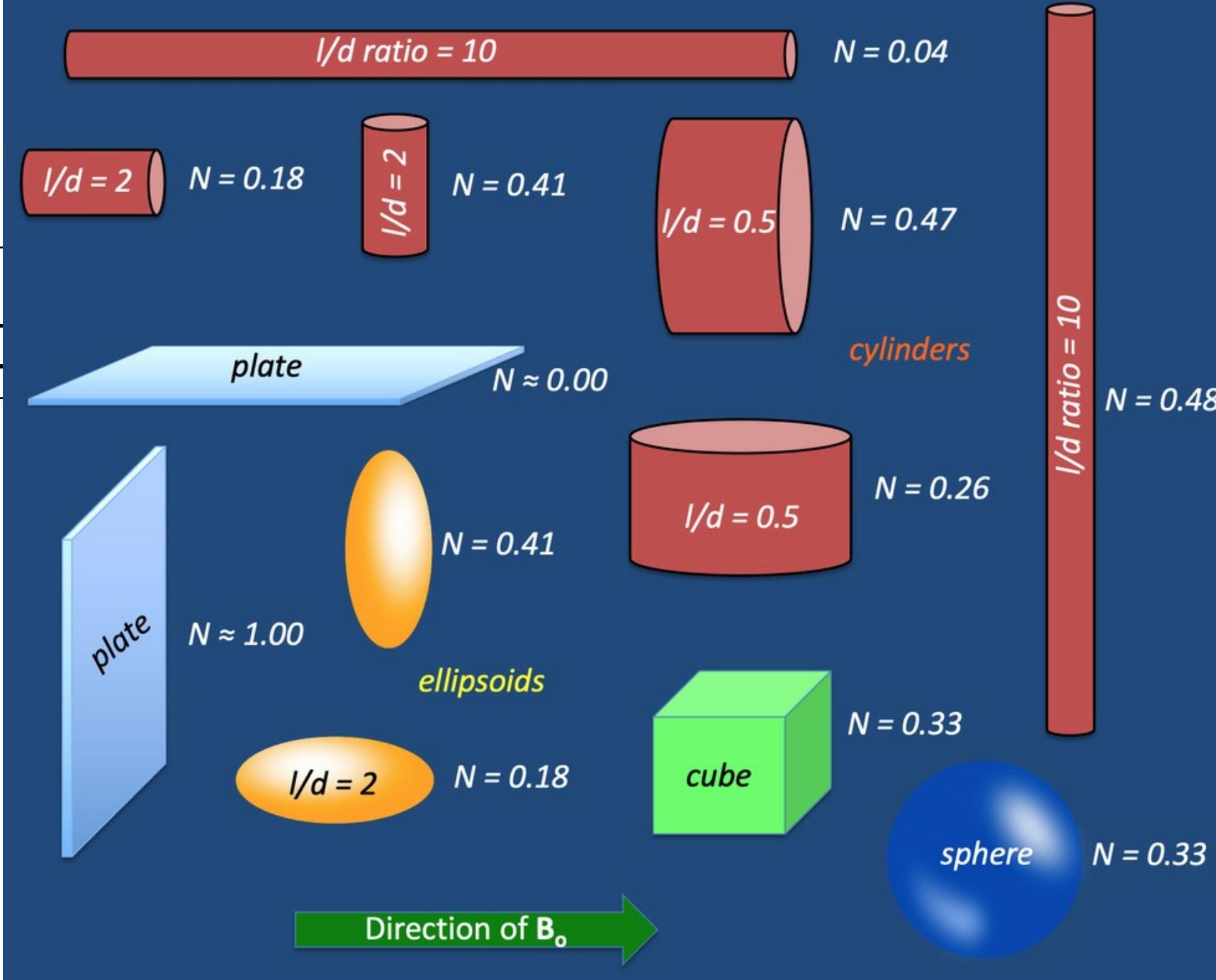


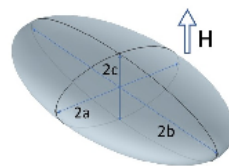
TABLE I. Approximate effective (“integral”) demagnetizing factor along applied magnetic field.

# Demagnetizač

Shape                      Geometry                      Demagnetizing factor along applied field

$$\chi_{skut} = \frac{\chi_r}{1 - N}$$

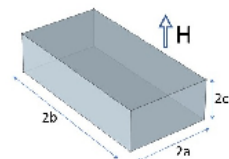
Ellipsoid (exact)



$$N = \frac{1}{2} \frac{b}{a} \frac{c}{a} \int_0^\infty \frac{ds}{(s + \frac{c^2}{a^2}) \sqrt{(s+1)(s + \frac{b^2}{a^2})(s + \frac{c^2}{a^2})}}$$

$$\mu_{skut} = \frac{\mu_r}{1 - N}$$

Rectangular cuboid



$$N^{-1} = 1 + \frac{3}{4} \frac{c}{a} \left(1 + \frac{a}{b}\right)$$

Strip, rectangular



$$N^{-1} = 1 + \frac{2}{3} \frac{c}{a} \text{ for } (c/a \gtrsim 5), = 1 + \frac{3}{4} \frac{c}{a} \text{ for } (c/a \lesssim 5)$$

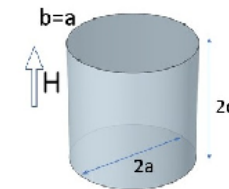
Strip, elliptical



$$N^{-1} = 1 + \frac{c}{a}$$

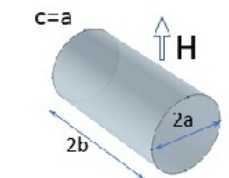
N = 0,08:

Cylinder, axial



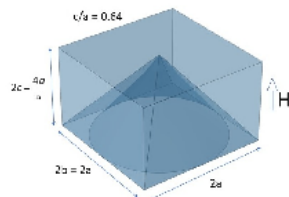
$$N^{-1} = 1 + 1.6 \frac{c}{a}$$

Cylinder, transverse



$$N^{-1} = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{a}{b}$$

Great pyramid



$$N = 0.64 \text{ (0.64, 0.49)}$$

• Toroid: N =

(cone, cuboid)

# R - ztráty

- konečná šířka rezonance

$$\Delta f = f_2 - f_1$$

- frakční šířka pásma

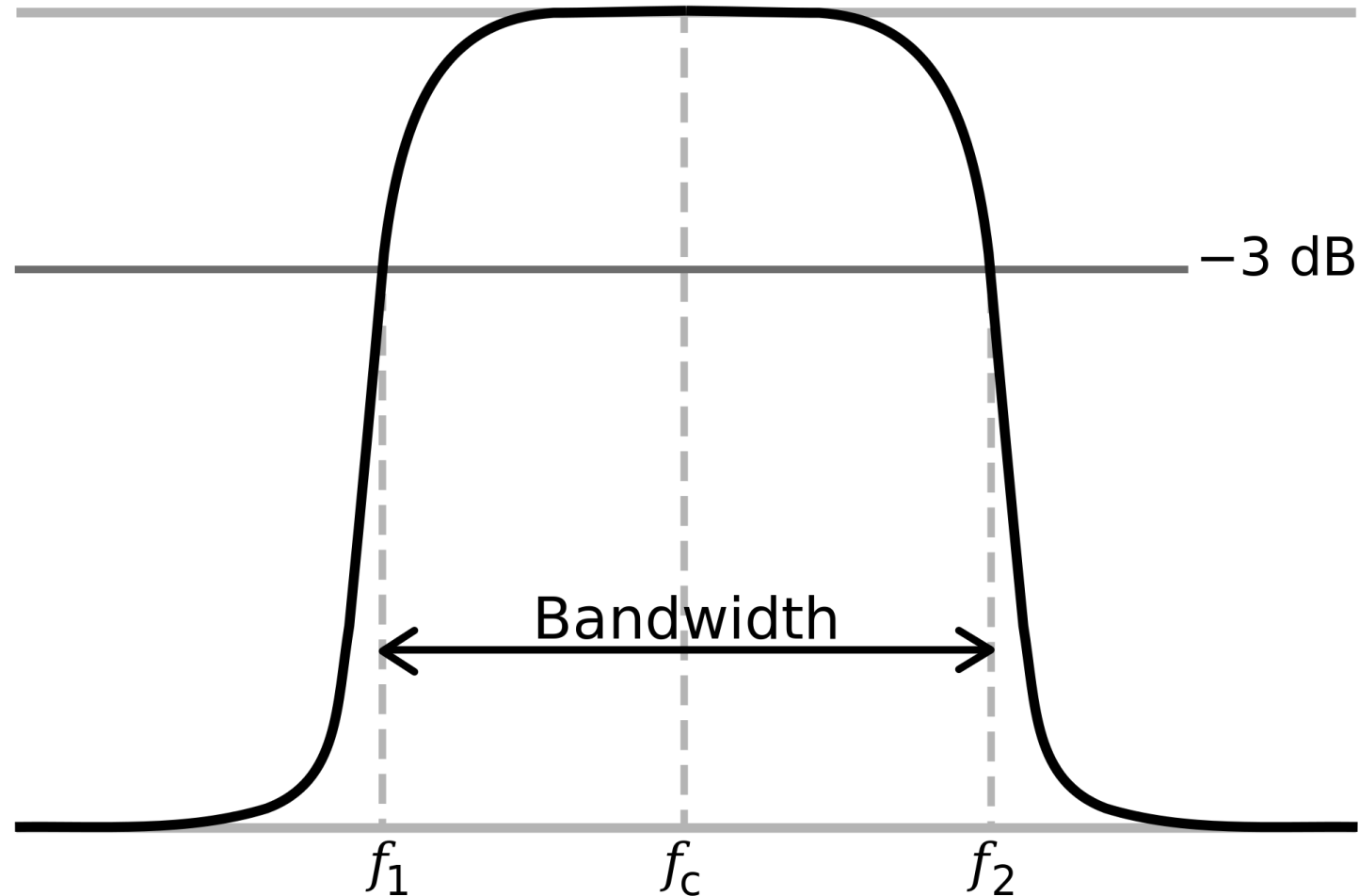
$$B_f = \frac{\Delta f}{f_0}$$

- činitel kvality

$$Q = \frac{1}{B_f} = \frac{f_0}{\Delta f}$$

$$Q = \frac{X_L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

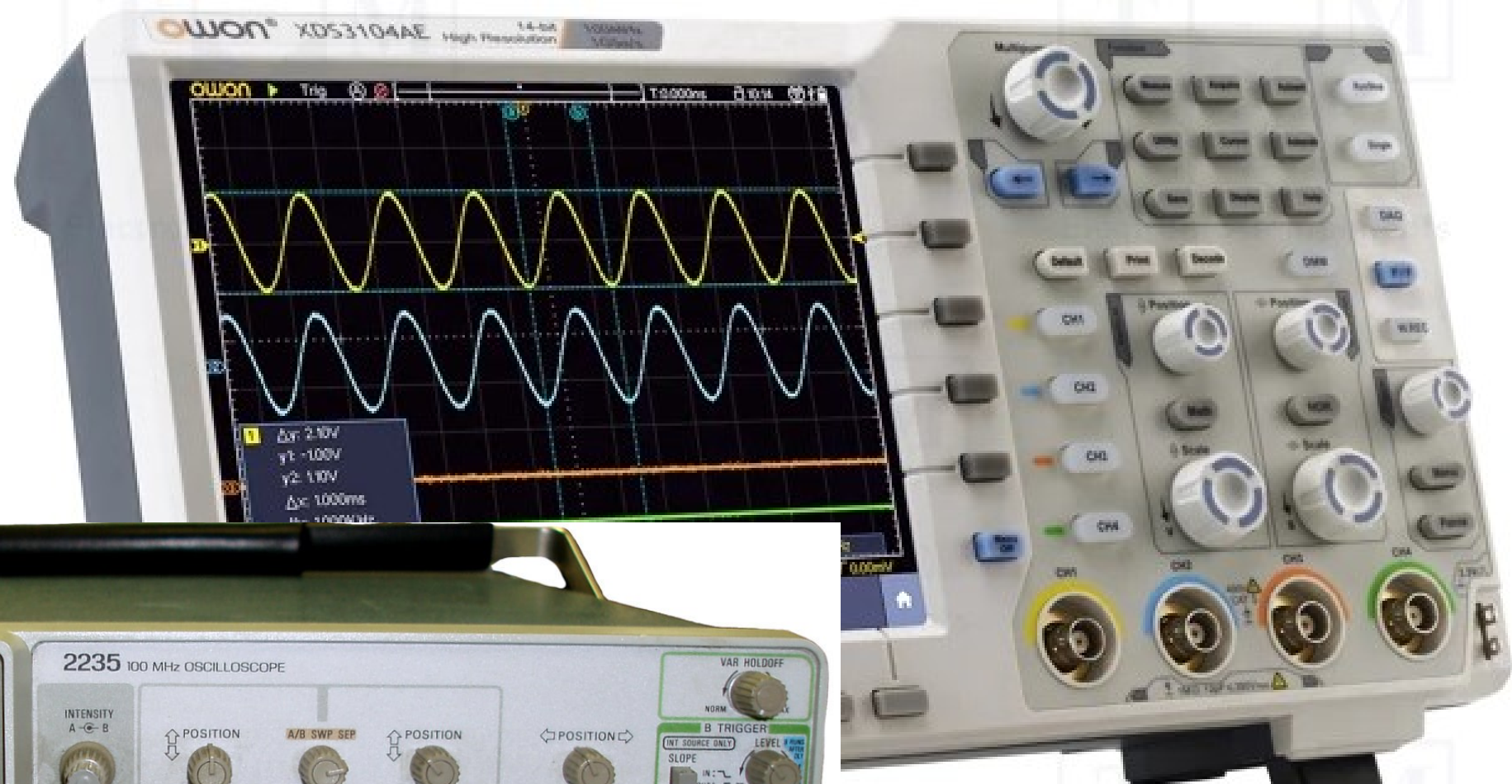
$$-20 \text{ dB} \\ -3 \text{ dB} \approx 0,01 \cdot 0,5$$





# Osciloskop

- paralelně k R
- velký R přístroje
- více kanálů
- sinus lepší





# Praktické aspekty

- proměřte si zdroj
- co měříme?  
(peak-to-peak,  $\sqrt{2}$ , ...)
- proměřte si součástky  
(multimetrem)
- nastavte osciloskop  
(vysoký R)
- správná kombinace  
L  $\rightarrow$  C; R  
 $\rightarrow$  vhodná  $f_r$
- vysoké frekvence  
( $\gg$  MHz)  
 $\rightarrow$  skin efekt?
- měření fázového  
posunu
- modelování vlastností  
cívky ...

- elektrické vlastnosti?  
měření odporu cívky ...

