Turnaj Mladých Fyziků

Shooting Rubber Band

Problem No. 4

Úvodní soustředění

FZU

Fyzikální ústav Akademie věd České republiky

FzÚ AV ČR, Praha, 21. - 22. 10. 2023

FJFI

Střílející gumička

úloha č. 4

Zadání

4. Shooting Rubber Band
A rubber band may fly a longer distance if it is non-uniformly stretched when shot, giving it spin. Optimise the distance that a rubber band with spin can reach.

4. Střílející gumička
Dostřel napnuté gumičky lze prodloužit, pokud ji při výstřelu roztočíme vlivem nestejnoměrného napnutí. Optimalizujte vzdálenost, kterou roztočená gumička může uletět.

Analýza zadání

4. Střílející gumička

Dostřel napnuté gumičky **lze prodloužit**, **pokud ji** při výstřelu **roztočíme vlivem nestejnoměrného napnutí**. Optimalizujte vzdálenost, kterou roztočená gumička může uletět.

Dostřel lze prodloužit*, pokud gumičku roztočíme vlivem nestejnoměrného napnutí.*

Je to pravda?

Předpokládáme, že **ANO** (Úlohy byly testovány)

Analýza zadání

Je to pravda?

Předpokládáme, že **ANO** (Úlohy byly testovány)

Pro zdárné vyřešení úloha je třeba jev pozorovat.

Nehledat proč to nejde, ale hledat provedení, aby to fungovalo.

Analýza zadání

4. Střílející gumička

Dostřel napnuté gumičky **lze prodloužit**, **pokud ji** při výstřelu **roztočíme vlivem nestejnoměrného napnutí**. Optimalizujte vzdálenost, kterou roztočená gumička může uletět.

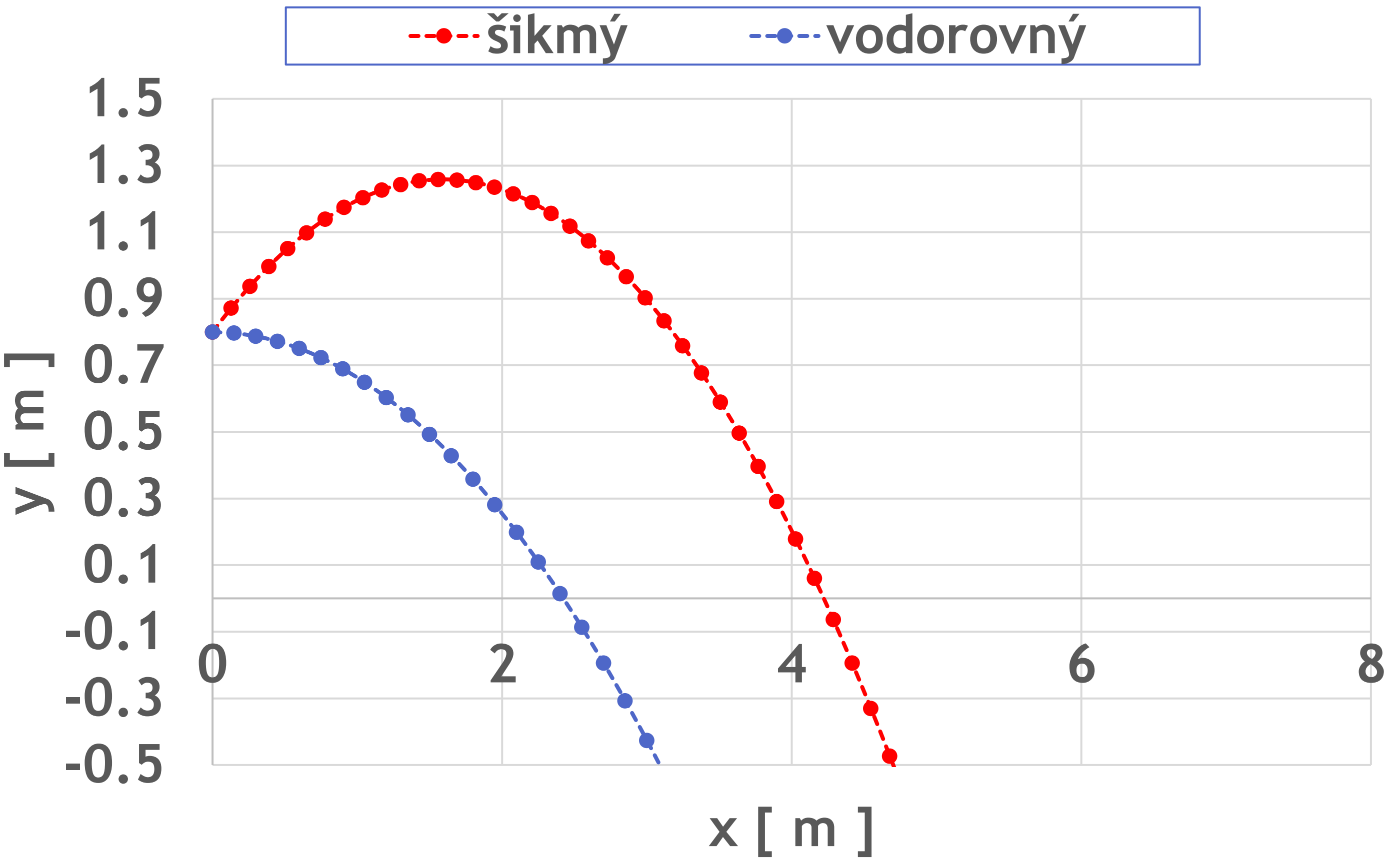
Dostřel lze prodloužit, pokud ji ***roztočíme*** *vlivem* ***nestejnoměrného napnutí****.*

Co je podstatný jev?

Rotace nebo nestejnoměrné napnutí?

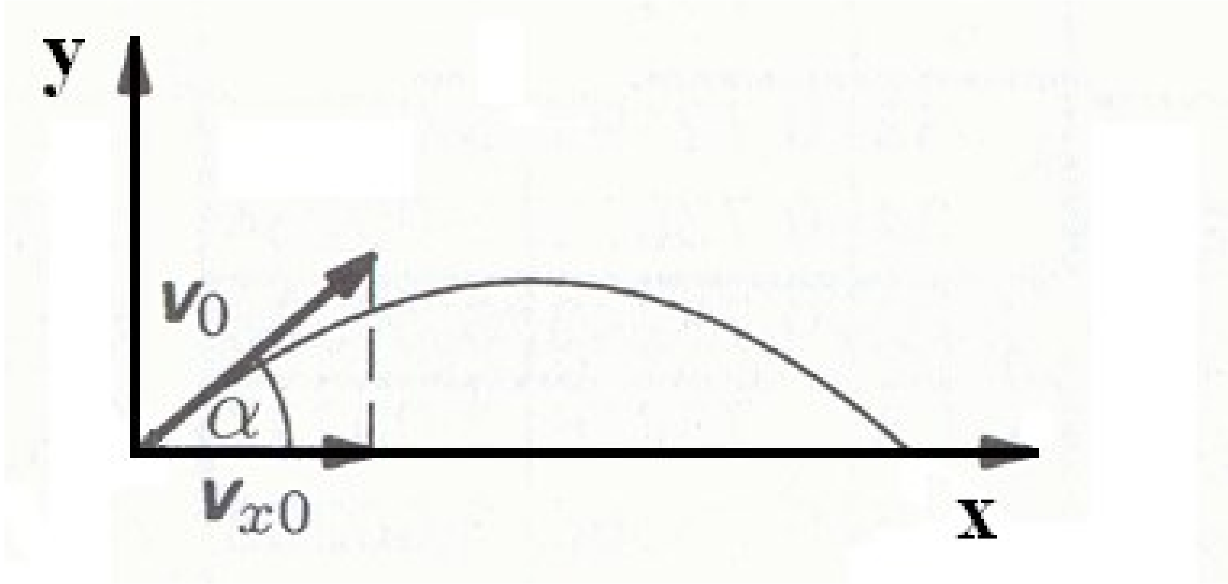
Jak modelovat pohyb gumičky bez rotace?

Vodorovný/šikmý vrh



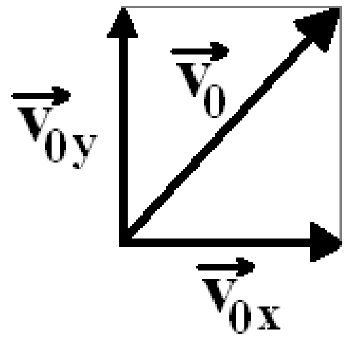
Jak modelovat pohyb gumičky bez rotace?

Vodorovný vrh (jednoduchá situace)



Vodorovný (jednoduchá situace)

Analytické řešení:



$$v_{0x} = v_0 \cdot cos\alpha$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot sin\alpha$$

$$\boxed{\begin{aligned} v_x &= v_{0x} = v_0 \cdot cos\alpha \\ v_y &= v_{0y} - g \cdot t = v_0 \cdot sin\alpha - g \cdot t \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= v_{0x} \cdot t = v_0 \cdot t \cdot cos\alpha \\ y &= v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot t \cdot sin\alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \end{aligned}}$$

Vodorovný (jednoduchá situace)

Trajektorie je parabola: (důkaz)

$$x = v_{0x} \cdot t = v_0 \cdot t \cdot cos\alpha$$

$$y = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 = v_0 \cdot t \cdot sin\alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Vyjádříme čas z první rovnice:

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot cos\alpha}$$

Vodorovný (jednoduchá situace)

Trajektorie je parabola: (důkaz)

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot cos\alpha}$$

$$y = v_0 \cdot \frac{x}{v_0 \cdot cos\alpha} \cdot sin\alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot cos\alpha}\right)^2$$

$$y = tg\alpha \cdot x - \frac{g}{2 \cdot (v_0 \cdot cos\alpha)^2} \cdot x^2$$

Vodorovný (jednoduchá situace)

Trajektorie je parabola: (důkaz)

$$y = \boxed{-\frac{g}{2 \cdot (v_0 \cdot cos\alpha)^2}} \cdot x^2 + \boxed{tg\alpha} \cdot x$$

Rovnice paraboly z matematiky:

$$y = \boxed{A} \cdot x^2 + \boxed{B} \cdot x + C$$

Je to parabola.

Vodorovný/šikmý vrh

(komplikovanější situace-střílíme z počáteční výšky)

Analytické řešení:

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cdot cos\alpha$$

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t = v_0 \cdot sin\alpha - g \cdot t$$

$$x = v_0 \cdot t \cdot cos\alpha$$

$$y = h_0 + v_0 \cdot t \cdot sin\alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Vodorovný/šikmý vrh

(komplikovanější situace-střílíme z počáteční výšky)

Hledáme vzdálenost dostřelu:

Doba letu – podmínka pro let:

$$0 \leq h_0 + v_0 \cdot t \cdot sin\alpha - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

Přepíšeme kvadratickou rovnici na obvyklý tvar z matematiky:

$$0 \leq -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t \cdot sin\alpha + h_0$$

Vodorovný/šikmý vrh

(komplikovanější situace-střílíme z počáteční výšky)

Musíme spočítat diskriminant:

$$D = (v_0 \cdot sin\alpha)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot g\right) \cdot h_0$$

Stanovíme kořeny rovnice:

$$t_{1,2} = \frac{-v_0 \cdot sin\alpha \pm \sqrt{{v_0}^2 \cdot sin^2\alpha + 2 \cdot g \cdot h_0}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot g\right)}$$

Vodorovný/šikmý vrh

(komplikovanější situace-střílíme z počáteční výšky)

Smysl dává pouze kladný kořen:

$$t_1 = \frac{v_0 \cdot sin\alpha + \sqrt{{v_0}^2 \cdot sin^2\alpha + 2 \cdot g \cdot h_0}}{g}$$

Vzdálenost doletu:

$$l = v_0 \cdot cos\alpha \cdot \frac{v_0 \cdot sin\alpha + \sqrt{{v_0}^2 \cdot sin^2\alpha + 2 \cdot g \cdot h_0}}{g}$$

Vodorovný/šikmý vrh

(komplikovanější situace-střílíme z počáteční výšky)

Maximální dolet:

$$l = \frac{{v_0}^2 \cdot sin\alpha \cdot cos\alpha}{g} + \frac{v_0 \cdot cos\alpha \cdot \sqrt{{v_0}^2 \cdot sin^2\alpha + 2 \cdot g \cdot h_0}}{g}$$

Vodorovný vrh

$$\alpha = 0$$

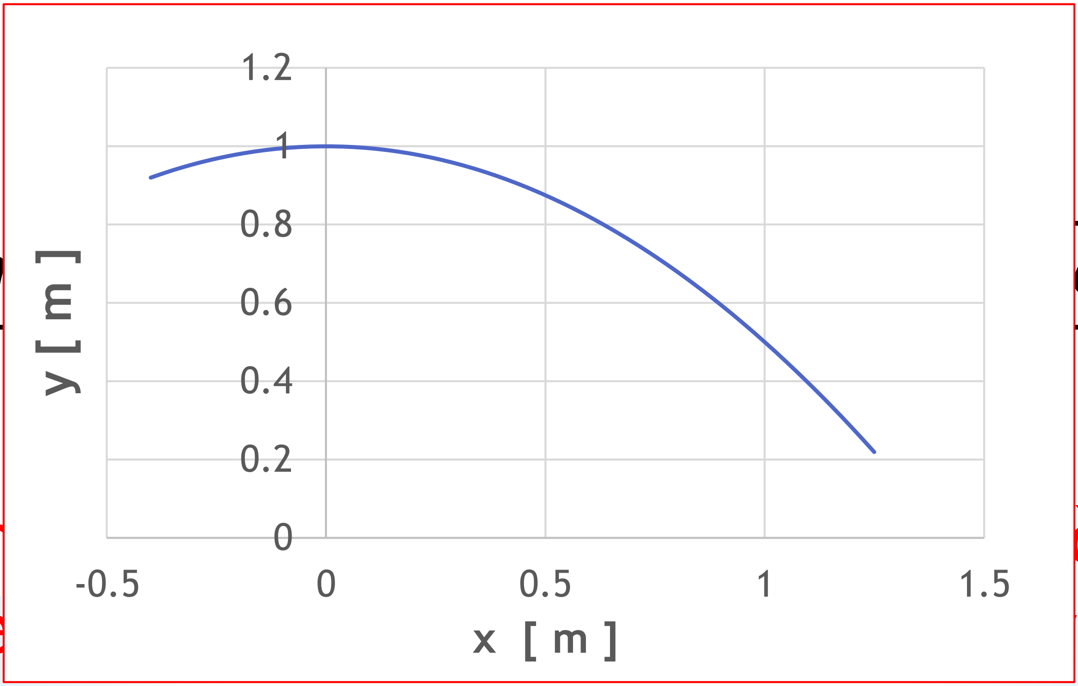
$$l = \frac{v_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0}}{g} = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g \cdot h_0}{g^2}} = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{g}}$$

Vodorovný vrh

$$l = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{g}}$$

Pro maximální dolet je třeba max. počáteční rychlost $\boldsymbol{v_0}$ a velká počáteční výška $\boldsymbol{h_0}$.

$l = \frac{{v_0}^2 \cdot si}{}$ … $\alpha + 2 \cdot g \cdot h_0$



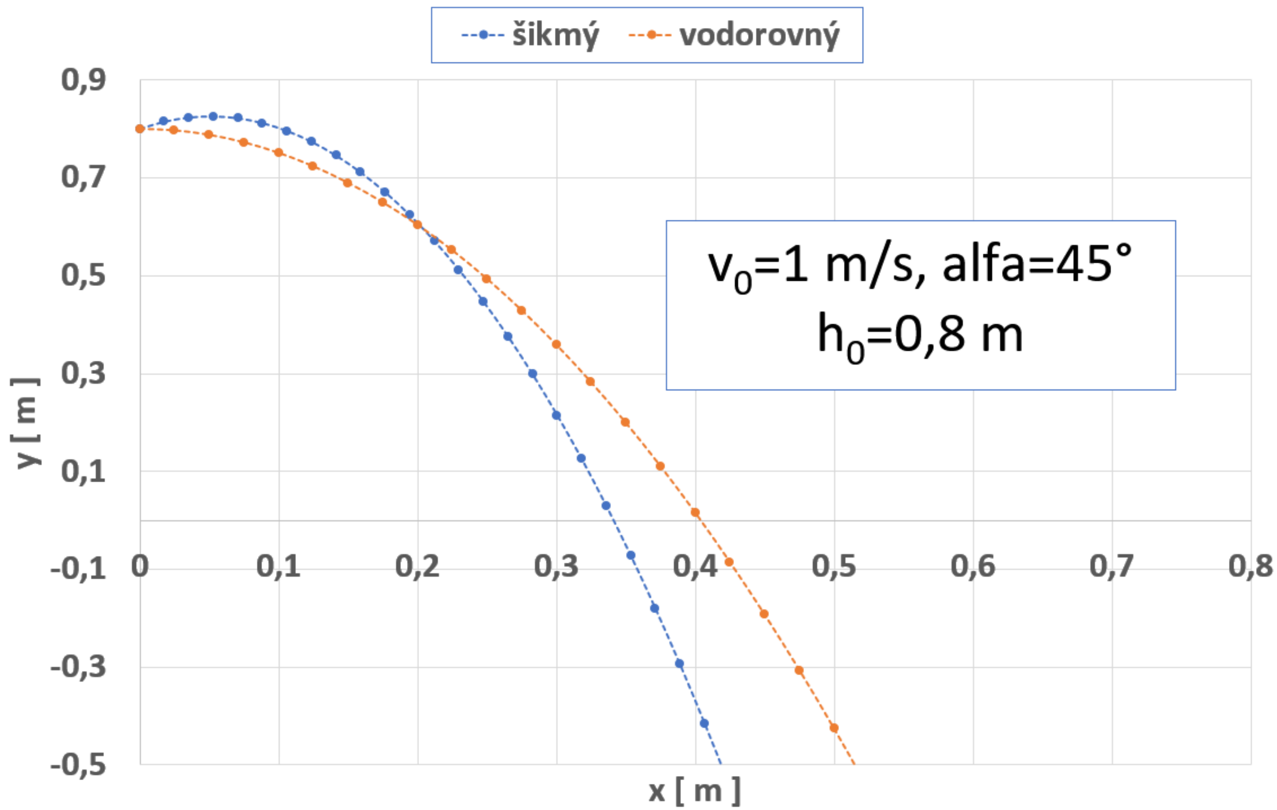
Pro maxim … ční rychlost

$\boldsymbol{v_0}$ a ve … úhel α.

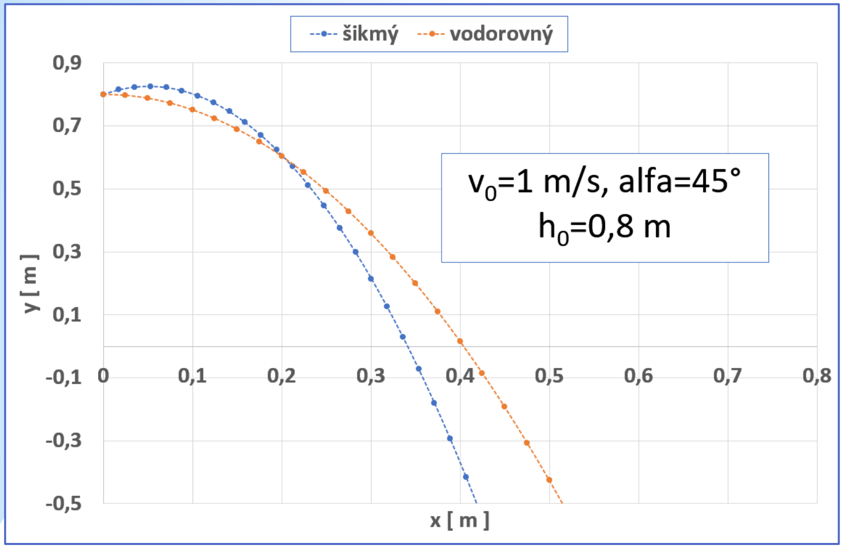
Paradox

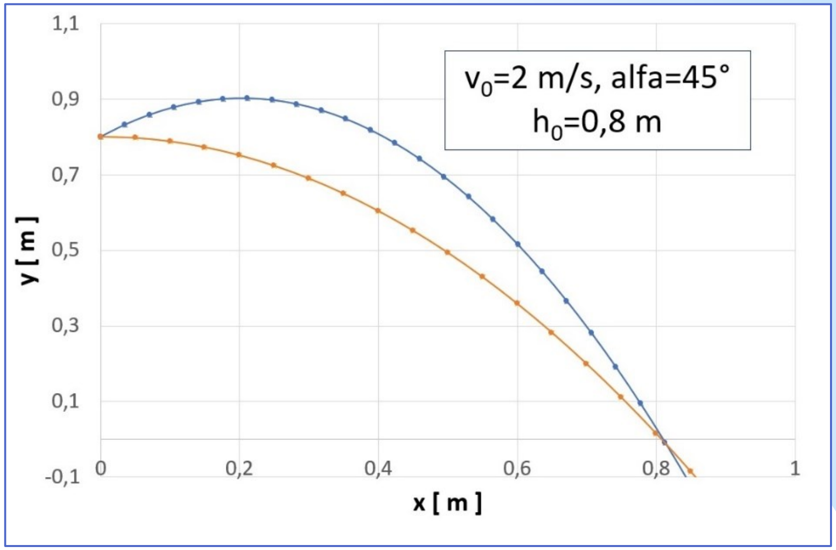
$$l_{šikmý} = \frac{{v_0}^2 \cdot sin\alpha \cdot cos\alpha}{g} + \frac{v_0 \cdot cos\alpha \cdot \sqrt{{v_0}^2 \cdot sin^2\alpha + 2 \cdot g \cdot h_0}}{g}$$

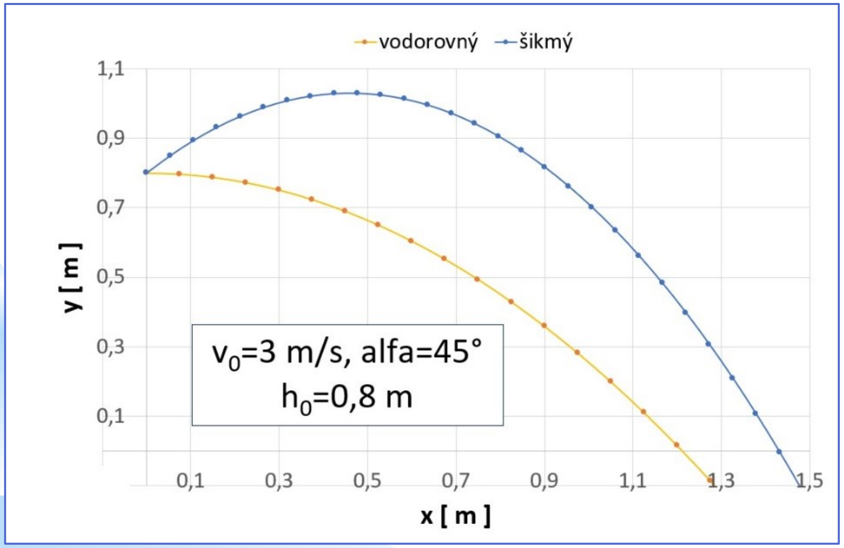
$$l_{vodorovný} = v_0 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{g}}$$



Paradox







Za této podmínky je vodorovný vrh výhodnější.

$$\sqrt{\frac{4 \cdot g \cdot h_0}{3 + 2 \cdot \sqrt{3}}} \geq v_0$$

(Bez záruky)

Máme jednoduchou teorii a co s ní?

Natočení letu gumičky a rozbor Trackerem asi nepůjde.

Bude nutno sledovat dolet a doufat, že trajektorie je parabola.

Zkusit odhadnout počáteční rychlost gumičky z délky „letu“ a z napínací síly. Porovnat obojí.

Odhad počáteční rychlosti

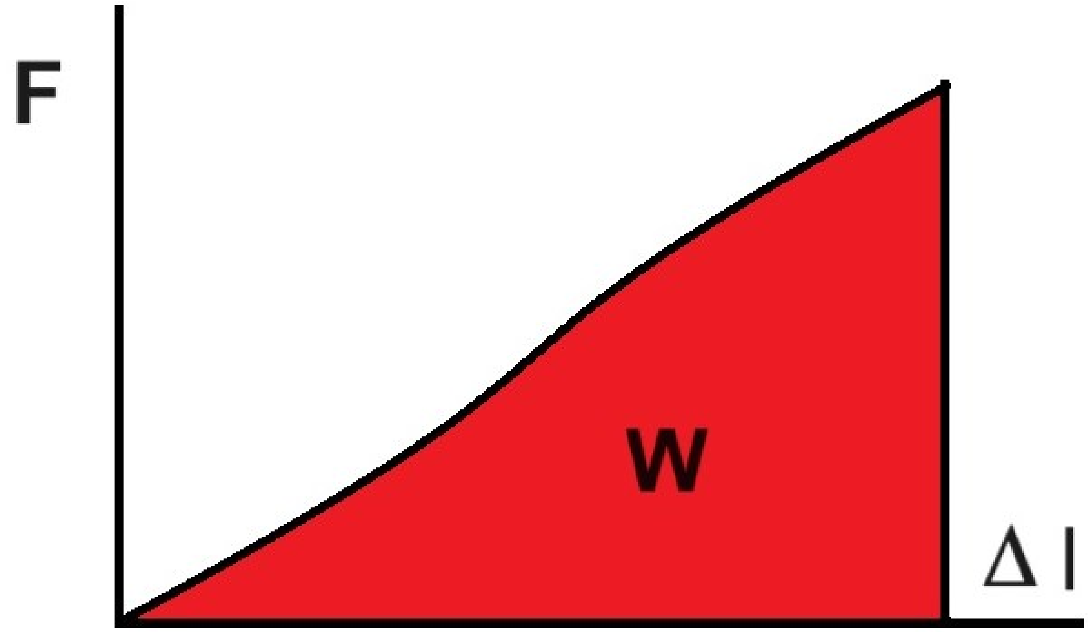
ZZME: Práce vložená do napnutí gumičky se přemění na její kinetickou energii → určíme $\boldsymbol{v_0}$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot {v_0}^2 = W \;\rightarrow\; v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot W}{m}}$$

Bez rotace

Odhad počáteční rychlosti

Změříme závislost napínací síly na natažení a práci dostaneme integrací.



Odhad počáteční rychlosti

Z doletu gumičky určíme $\boldsymbol{v_0}$´ potřebnou počáteční rychlost

$$v_0' = \frac{l_{vodorovný}}{\sqrt{\frac{2 \cdot h_0}{g}}}$$

$$v_0' \leq v_0$$

Bude platit?

Rotující gumička

ZZME: Práce vložená do napnutí gumičky se přemění na její kinetickou energii **translačního** a **rotačního pohybu**

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot {v_0}^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot {\omega_0}^2 = W$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot W - J \cdot {\omega_0}^2}{m}}$$

Rotace sníží velikost translační rychlosti !

Problém

Počáteční rychlost při rotaci vychází nižší.

↓

Měl by být kratší dostřel.

↓

Ze zadání víme opak.

Otázky: (Ne jen od oponenta)

- Proč rotace zvyšuje dolet?
- Vzniká nějaká zdvihová síla? (Magnusův efekt?)
- Transformuje se energie rotace do energie translace?
- Má rotující gumička vyšší počáteční rychlost než nerotující? Proč?
- Letí rotující gumička po výhodnější trajektorii?
- Má rotující gumička lepší aerodynamické vlastnosti?

Odpovědi: (Odhady)

- Proč rotace zvyšuje dolet? **(Viz níže)**
- Vzniká nějaká zdvihová síla? (Magnusův efekt?) (Asi ne – gumička letí „naplocho“ a pomalu.)
- Transformuje se energie rotace do energie translace? (Možná. Gumička se po výstřelu zkrátí a zaujme celkově tvar s nižším momentem setrvačnosti.)

$$\frac{1}{2} \cdot J_1 \cdot {\omega_1}^2 - \frac{1}{2} \cdot J_0 \cdot {\omega_0}^2 = \Delta E_{kR} \overset{?}{=} -\Delta E_{kT}$$

Odpovědi: (Odhady)

Kruhová gumička nekonečně tenká

$$J = m \cdot r^2$$

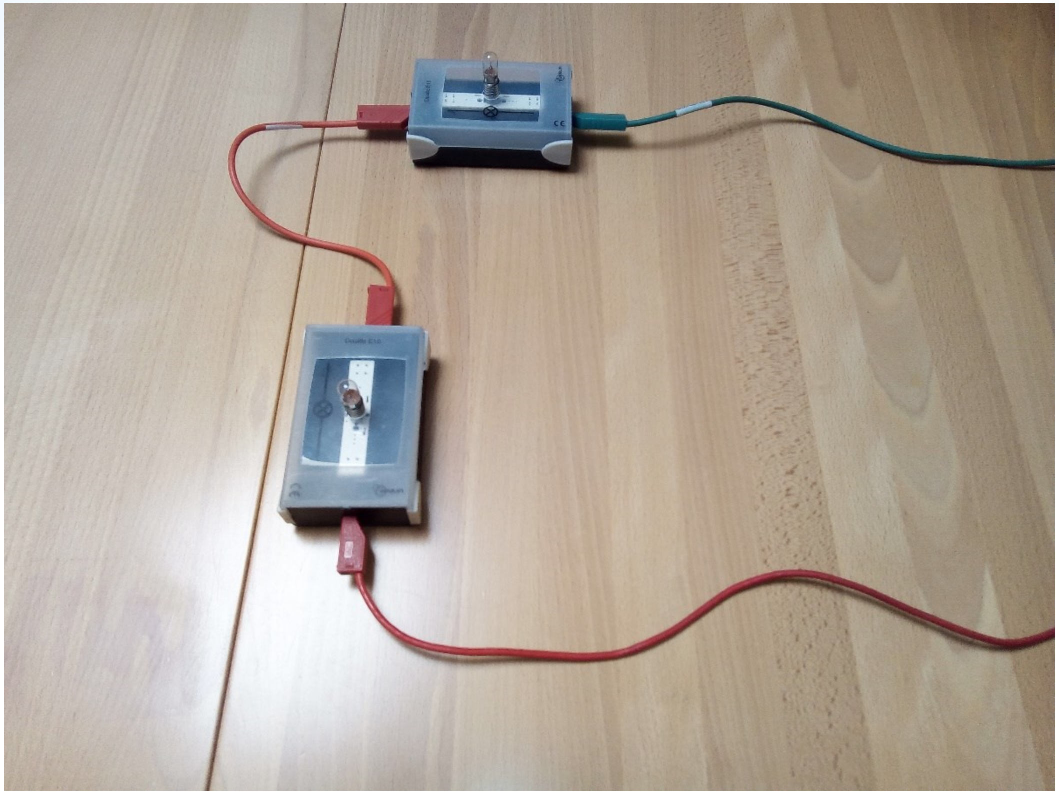
Kruhová gumička reálně tenká o vnějším poloměru ***R*** a vnitřním ***r***

$$J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (R^2 + r^2)$$

Klesá délka gumičky, klesá moment setrvačnosti. Roste úhlová rychlost nebo energie míří do translačního pohybu?

Otázky: (Ne jen od oponenta)

- Má rotující gumička vyšší počáteční rychlost než nerotující? Proč? (Menší ztráty na počátku? Menší tření při startu?)
- Letí rotující gumička po výhodnější trajektorii?
- (Moment hybnosti stabilizuje polohu – setrvačník.)
- Má rotující gumička lepší aerodynamické vlastnosti?
- (Asi ne, protože letí malou rychlostí.)



Děkuji za pozornost ☺