

# 14: Ruler Trick alias Trik s pravítkem

Šimon Kos

Katedra fyziky, Fakulta aplikovaných věd

Západočeská univerzita v Plzni

Zadání anglicky a česky:

Place a ruler on the edge of a table, and throw a ball at its free end. The ruler will fall. However, if you cover a part of the ruler with a piece of paper and repeat the throw, then the ruler will remain on the table while the ball will bounce off it. Explain this phenomenon, and investigate the relevant parameters.

Na hranu stolu položte pravítko a na jeho volný konec hodte míček či kuličku. Pravítko spadne. Ovšem když překryjete část pravítka papírem a hod zopakujete, pak pravítko zůstane na stole, zatímco míček či kulička se odrazí. Vysvětlete tento jev a prozkoumejte relevantní parametry.

Neintuitivnost atmosférického tlaku, tak jako kulaté Země (zatím není komunita, která by tvrdila, že tlak není)

Magdeburská koule



$$10^5 \text{Pa} = \frac{10^5 \text{N}}{\text{m}^2}$$

SI jednotky vedou na velkou sílu a velkou plochu které se hůř představují

Obojí zmenšíme

$$10^5 \text{Pa} = \frac{10 \text{N}}{10^{-4} \text{m}^2} = \frac{1 \text{kg} \times 10 \text{ms}^{-2}}{(10^{-2} \text{m})^2}$$

Atmosférický tlak je tíha 1kg na plochu 1 čtverečního centimetru

V imperiálních jednotkách vychází názorněji

$$\frac{1 \text{kg} \times 10 \text{ms}^{-2}}{(10^{-2} \text{m})^2} = \frac{16 \times \frac{4}{9} \times 1 \text{kg} \times 10 \text{ms}^{-2}}{\left(\frac{8}{3} \times 10^{-2} \text{m}\right)^2} \quad \text{tj. asi 15 psi}$$

Hydrostaticky

$$\rho gh = 10^3 \text{kg} \times 10 \text{ms}^{-2} \times 10 \text{m}$$

Deset metrů vody

$$\rho gh = \frac{4}{3} \times 10 \times 10^3 \text{kg} \times 10 \text{ms}^{-2} \times 10 \text{m} \times \frac{1}{10} \times \frac{3}{4}$$

Tři čtvrtě metru rtuti

K naší úloze      Já taky jsem si myslel, že to je setrvačnost papíru, případně vzduchu

Hynek—je to tlak

Petr—je to jako ponorka přilepená ke dnu

Co zkusila naše skupina na Vydře:

Děravý papír, pak vespod jen další dvě pravítka—výrazné snížení jevu

Stojan pro přesné určení polohy (Hynkův nápad)

Filmování pro určení zrychlení a odtud časový průběh síly, ale problém s malým časovým rozlišením mobilu

Místo toho použití siloměru, řádově 1N síly po dobu řádově jednotek ms—impuls o řád menší než hybnost při dopadu

Standard: plexi pravítko. Ohebné pravítko mělo nemonotónní závislost výšky na vysunutí; dřevěné by bylo potřeba použít  
na srovnatelné experimenty

Hladké pravítko na hladkém stole vytvářelo podtlak i bez papíru; přilnavost ještě zvýšena vodou

Proto pro náš jev lepší pravítko s nožičkami právě proti přilnavosti

Teoretická analýza jednoduchým modelem

Náraz—okamžitá síla, ideálně není čas pro vzduch, aby se pohnul

Pro mezní vzdálenost akorát rovnováha momentů síly

$$F_K l = M$$

Pravá strana: papír

$$dM = Pwxdx$$

$$M = \int dM = \int_0^{L-l} Pwxdx = Pw \int_0^{L-l} xdx = Pw \frac{(L-l)^2}{2}$$

Levá strana: kulička

Hybnost, kterou kulička nabere při pádu, úměrná odmocnině z výšky  $\sqrt{h}$   $p = m\sqrt{2gh}$

Jestliže doba nárazu je nezávislá na hybnosti, pak je taky síla úměrná  $\sqrt{h}$

Tohle bychom čekali pro lineárně elastické pravítko

—pak je doba nárazu úměrná periodě, která je nezávislá na počáteční rychlosti

$$F = -ky \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Jinak řečeno: potenciální energie se přemění na deformační potenciální energii

$$mgh = \frac{1}{2}ky_{\max}^2$$

$$F_{\max} = ky_{\max} = \sqrt{2kmgh} \qquad \text{úměrné } \sqrt{h}$$

Euler-Bernoulli dá tuhost:

$$k = \frac{3EI}{l^3}$$

$E$  [Pa] Youngův modul pružnosti

$I$  [m<sup>4</sup>] Druhý moment plochy

Pro obdélníkový průřez šířky  $w$  a výšky  $h$  je  $I = \frac{wh^3}{12}$

Předně vidíme správné jednotky  $\frac{\text{Nm}^{-2}\text{m}^4}{\text{m}^3} = \text{Nm}^{-1}$

Naopak: pokud víme, že tuhost má být úměrná  $EI$ , pak ve jmenovateli musí být  $l^3$  z rozměrové analýzy

Pouze pro bezrozměrný koeficient 3 je potřeba Euler-Bernoulli teorie

Dosazení do síly  $F_K = F_{\max} = \sqrt{2kmgh} = \sqrt{2 \frac{3E}{l^3} \frac{wh^3}{12} mgh} = h^2 \sqrt{\frac{Ew}{2l^3} mg}$

V rychlosti pro zájemce a pauza pro ostatní; můžu vyplnit detaily

Ohýbající moment  $\tau = EI \frac{d^2 y}{dx^2}$       Smyková síla  $Q = \frac{d\tau}{dx}$       Zatěžující síla  $q = \frac{dQ}{dx}$

Celkově  $q = EI \frac{d^4 y}{dx^4}$

Zatížení v bodě  $q = F\delta(x - l)$       neboli okrajová podmínka  $\left. \frac{d^3 y}{dx^3} \right|_{x=l} = -F$

Zbylé okrajové podmínky  $y|_{x=0} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=l} = 0$

Řešení  $y = \frac{Fl^3}{EI} \left( \frac{1}{2!} \left( \frac{x}{l} \right)^2 - \frac{1}{3!} \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right)$       je vidět, že všechny okrajové podmínky jsou splněny

Pro  $x = l$  je  $y = \frac{Fl^3}{3EI} \equiv \frac{F}{k}$       Takže onen faktor 3, protože polovina bez šestiny je třetina



Celkově dosazení do původní rovnice rovnováhy momentů síly

$$F_K l = M$$

dá

$$h^2 \sqrt{\frac{2E}{w}} mg = P(L - l)^2 \sqrt{l}$$

Zjednodušení pro experiment se siloměrem pak

$$F_K = \frac{M}{l} = Pw \frac{(L - l)^2}{2l}$$

Klesající funkce jako v experimentu, shodou okolností 100x nižší hodnota v experimentu než v rovnici dalo by se argumentovat efektivním zmenšením tlaku kvůli vzduchu, co se dostal pod papír

Jen měkké pravítko dalo nemonotónní závislost, jak už jsem řekl

Hynkova alternativní představa—síla a její moment úměrné proudu vzduchu pod papír  
který je daný časovou derivací objemu dělenému objemem

Zároveň druhá věta impulsová—moment síly úměrný úhlovému zrychlení

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -K \frac{1}{\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = -K \frac{d \ln \alpha}{dt}$$

První integrál  $\frac{d\alpha}{dt} = -K \ln \alpha + C$

Integrační konstantu napíšem ve tvaru  $C = K \ln \alpha_0$

takže  $\frac{d \frac{\alpha}{\alpha_0}}{dt} = -\frac{K}{\alpha_0} \ln \frac{\alpha}{\alpha_0}$

Separace proměnných  $\frac{d \frac{\alpha}{\alpha_0}}{\ln \frac{\alpha}{\alpha_0}} = -\frac{K}{\alpha_0} dt$  vede na logaritmický integrál  $\text{Li} \left( \frac{\alpha}{\alpha_0} \right) = -\frac{K}{\alpha_0} (t - t_0)$

Takže máme dvě možnosti a můžeme debatovat a měřit.