9-Kmitající šroub

Šimon Kos

KFY, FAV, ZČU v Plzni

Zadání

9. Oscillating Screw

When placed on its side on a ramp and released, a screw may experience growing oscillations as it travels down the ramp. Investigate how the motion of the screw, as well as the growth of these oscillations depend on the relevant parameters.

9. Kmitající šroub

Položte šroub stranou na nakloněnou rovinu. Po uvolnění může šroub při pohybu dolů začít vykonávat kmity s rostoucí amplitudou. Prozkoumejte, jak pohyb šroubu závisí na relevantních parametrech.

Vydra:

Dá práci dosáhnout jevu

Šroub musí docela nabrat rychlost

Nejlíp fungoval speciálně vyrobený šroub jako houba:
Klobouk z podložky, původní hlava šroubu jako podhoubí

Tři pohyby: posuvný, rotace kolem osy šroubu, rotace v rovině rampy

Tření vede ke ztrátě celkové energie, ale zároveň k pumpování energie do obou rotací

Když je klobouk—moment setrvačnosti a moment hybnosti srovnatelný v obou rotačních pohybech

Eulerovy rovnice—časový vývoj vektoru úhlové rychlosti vůči tělesu v nejjednodušším případě volného tělesa

Přechod mezi inerciální soustavou a soustavou spojenou s tělesem—dodatečný člen omega x

Dobrý zdroj: Daivd Tong v kitu https://stemfellowship.org/iypt-references/problem9/

DAMTP je dobré místo mezi matematikou a fyzikou

V dobrém přiblížení osově symetrický objekt—dva momenty setrvačnosti sobě rovné

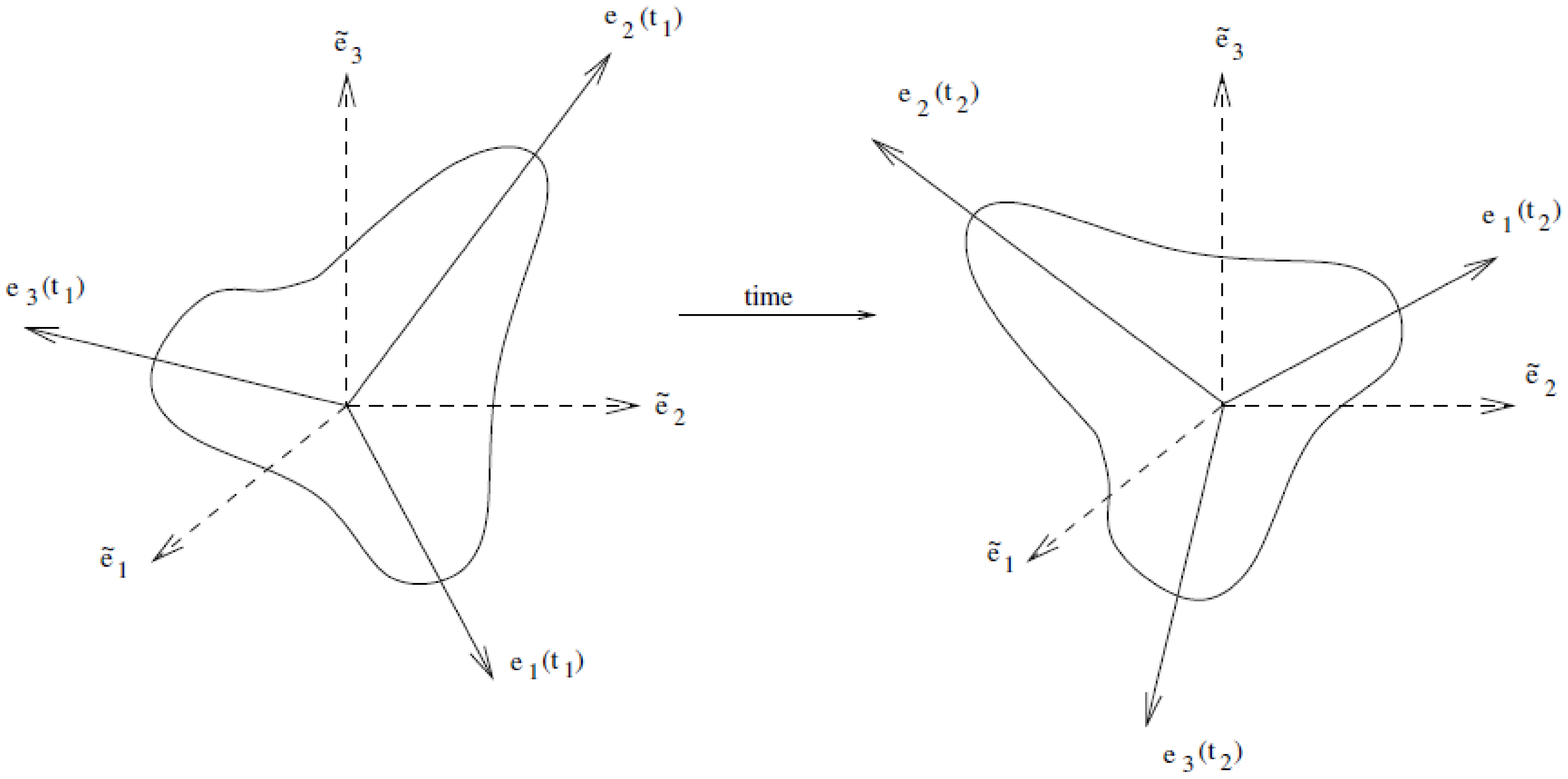
Základní body z Tongovy kapitoly 3 The Motion of Rigid Bodies

Pohyb tuhých těles je pozoruhodný:

Začneme s rotací kolem pevného bodu

Dvě souřadné soustavy a dvě báze vektorů se společným počátkem v pevném bodě

s vlnkou soustava inerciální a vektory nezávislé na čase, bez vlnky soustava spojená s tělesem a vektory závislé na čase



Obě báze jsou ortonormální, tj. vzájemně kolmé a délky jedna

$$\tilde{\mathbf{e}}_a \cdot \tilde{\mathbf{e}}_b = \delta_{ab} \quad , \quad \mathbf{e}_a(t) \cdot \mathbf{e}_b(t) = \delta_{ab}$$

δ_{ab} je tzv. Kroneckerovo delta, rovné jedničce pro $a = b$ a nule pro $a \neq b$

Převod z jedné báze na druhou je pomocí lineárního zobrazení, tj. matice $\mathbf{e}_a(t) = R_{ab}(t)\tilde{\mathbf{e}}_b$

Tady je Einsteinova sumační konvence—přes opakované indexy se sčítá

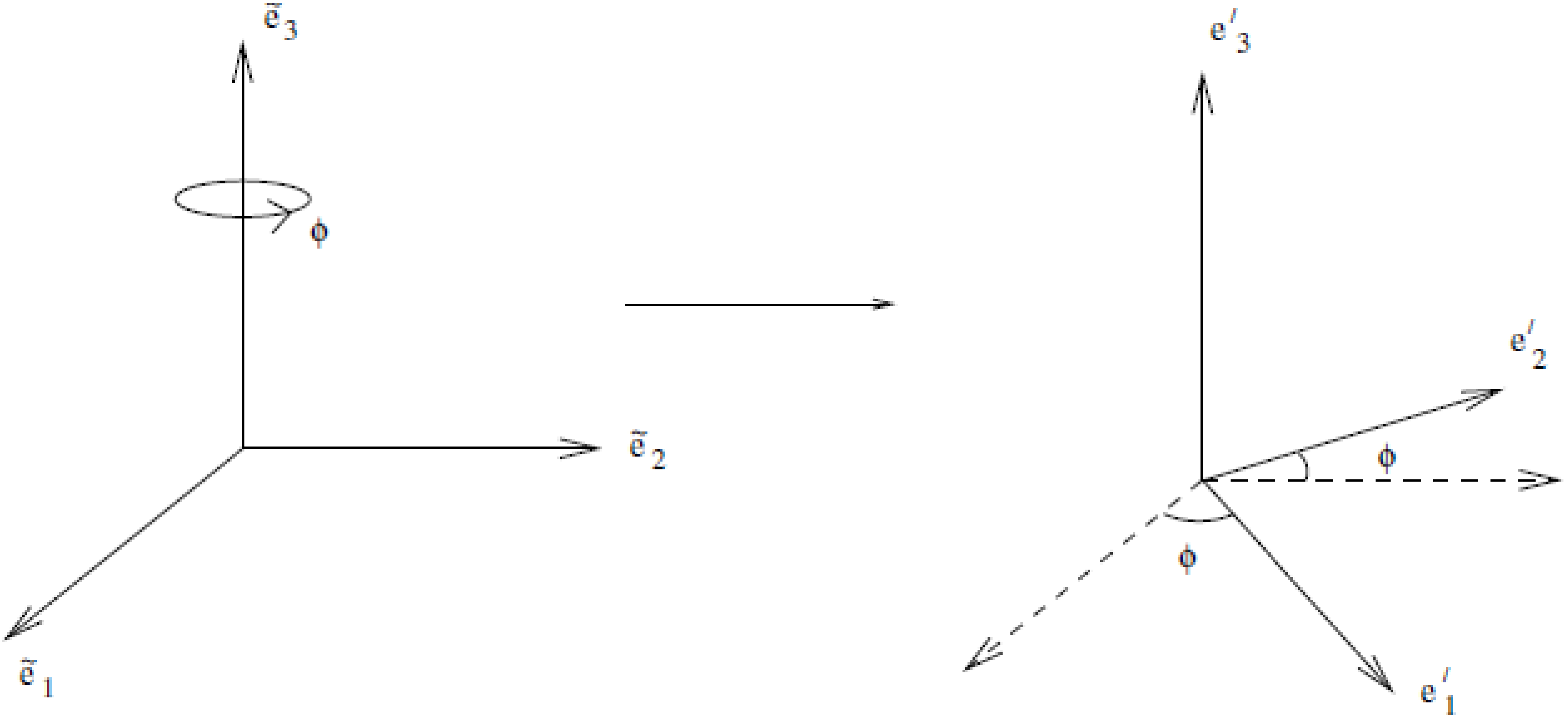
Tahle matice je ortogonální $(R^T R)_{ab} = \delta_{ab}$

tj. transponovaná matice je inverzní, tj. sloupce jsou na sebe kolmé

Konkrétní příklad, který se objeví dál v textu v souvislosti s Eulerovými úhly parametrizujícími libovolnou rotaci

$$R_3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotace o úhel ϕ kolem třetí osy, navíc první Eulerův úhel



$$R_3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ takže transponovaná matice (výměna řádků za sloupce) $$R_3{}^T(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Součin $$R_3{}^T(\phi)R_3(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

První řádek výsledné matice dostanem násobením prvního řádku postupně se všemi sloupci

$$(\cos\phi \quad -\sin\phi \quad 0)\begin{pmatrix} \cos\phi \\ -\sin\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \cos\phi\cos\phi + (-\sin\phi)(-\sin\phi) + 0\cdot 0 = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$$

$$(\cos\phi \quad -\sin\phi \quad 0)\begin{pmatrix} \sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \cos\phi\sin\phi - \sin\phi\cos\phi + 0\cdot 0 = 0$$

$$(\cos\phi \quad -\sin\phi \quad 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \cos\phi\cdot 0 - \sin\phi\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$$

takže první řádek výsledné matice je $(1 \quad 0 \quad 0)$ a celková výsledná matice pak je $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tj. jednotková matice s prvky δ_{ab}

Převod mezi oběma systémy bodu spojeného s tělesem

$$\mathbf{r}(t) = \tilde{r}_a(t)\,\tilde{\mathbf{e}}_a \quad \text{in the space frame}$$
$$= r_a\,\mathbf{e}_a(t) \quad \text{in the body frame}$$

V inerciální soustavě jsou vektory pevné a s časem se mění souřadnice
a v soustavě spojené s tělesem je to naopak

Vztah mezi souřadnicemi je dán toutéž maticí,
jen obráceným směrem a s obrácenou funkcí indexů

$$\tilde{r}_b(t) = r_a R_{ab}(t)$$

srov.

$$\mathbf{e}_a(t) = R_{ab}(t)\tilde{\mathbf{e}}_b$$

Časová derivace: v daném systému derivujeme tu veličinu, která závisí na čase

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\tilde{r}_a}{dt}\,\tilde{\mathbf{e}}_a \quad \text{in the space frame}$$
$$= r_a\,\frac{d\mathbf{e}_a(t)}{dt} \quad \text{in the body frame}$$

Pro nás je důležitá soustava spojená s tělesem: $$\frac{d\mathbf{e}_a}{dt} = \frac{dR_{ab}}{dt}\,\tilde{\mathbf{e}}_b = \frac{dR_{ab}}{dt}\,R^{-1}_{bc}\,\mathbf{e}_c \equiv \omega_{ac}\mathbf{e}_c$$

Časovou derivaci bázového vektoru spojeného s tělesem jsme vyjádřili opět pomocí těchže bázových vektorů, čímž jsme dostali derivaci matice násobené inverzní maticí

Tím jsme definovali $$\omega_{ac} = \dot{R}_{ab}(R^{-1})_{bc} = \dot{R}_{ab}R_{cb}$$

Tečka znamená časovou derivaci (Newtonovo označení) a v druhé rovnici jsme použili fakt, že inverzní matice je transponovaná

$$R^T R = 1$$

Tahle matice omega je antisymetrická ve svých indexech, jak je dokázáno na jednom řádku, takže má jenom tři nezávislé složky

$$\begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & -\omega_{31} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Antisymetrie dává nulu na diagonále
a pod diagonálou mínus toho, co je nad diagonálou

Proč jsme vybrali jako nenulové prvky zrovna $\omega_{12}, \omega_{23}, \omega_{31}$, tj. dva nad a jeden pod diagonálou, a ne třeba všechny nad?

Abychom ty tři složky mohli definovat cyklickou záměnou pomocí složek s jedním indexem, tedy složek vektoru:

$$\omega_{12} \equiv \omega_3, \omega_{23} \equiv \omega_1, \omega_{31} \equiv \omega_2$$

Zkrácený zápis $\omega_{ab} = \epsilon_{abc}\omega_c$

kde ϵ_{abc} je úplně antisymetrický s cyklickou záměnou: $\epsilon_{123} = \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1$

$$\epsilon_{321} = \epsilon_{213} = \epsilon_{132} = -1$$

takže $\epsilon_{abc} = \epsilon_{cab}$

Takže derivace bázového vektoru $\dfrac{d\mathbf{e}_a}{dt} = \omega_{ac}\mathbf{e}_c = \epsilon_{acb}\omega_b\mathbf{e}_c$

Vztah s Kroneckerovým delta $\epsilon_{abc}\epsilon_{ijc} = \delta_{ai}\delta_{bj} - \delta_{aj}\delta_{bi} = \epsilon_{cab}\epsilon_{cij}$

Odtud vynásobení definujícího vztahu $\omega_{ab} = \epsilon_{abc}\omega_c$ hodnotou ϵ_{iab} dá

$$\epsilon_{iab}\omega_{ab} = \epsilon_{abi}\omega_{ab} = \epsilon_{abi}\epsilon_{abc}\omega_c = (\delta_{bb}\delta_{ic} - \delta_{bc}\delta_{ib})\omega_c$$

Platí $\delta_{bc}\delta_{ib} = \delta_{ic}$ protože součin jednotkové matice samotné se sebou je zase jednotková matice, takže

$$(\delta_{bb}\delta_{ic} - \delta_{bc}\delta_{ib})\omega_c = (\delta_{bb} - 1)\delta_{ic}\omega_c$$

Dále platí $\delta_{bb} = 3$ součet tří jedniček na diagonále jednotkové matice

Odsud $(\delta_{bb} - 1)\delta_{ic}\omega_c = 2\omega_i$

Takže celkově dostáváme inverzní vztah k definujícímu vztahu $\omega_{ab} = \epsilon_{abc}\omega_c$

a to $\omega_i = \dfrac{1}{2}\epsilon_{iab}\omega_{ab}$

Vztah k vektorovému součinu pravotočivé ortonormální báze $\mathbf{e}_a \times \mathbf{e}_b = \epsilon_{abc}\mathbf{e}_c$

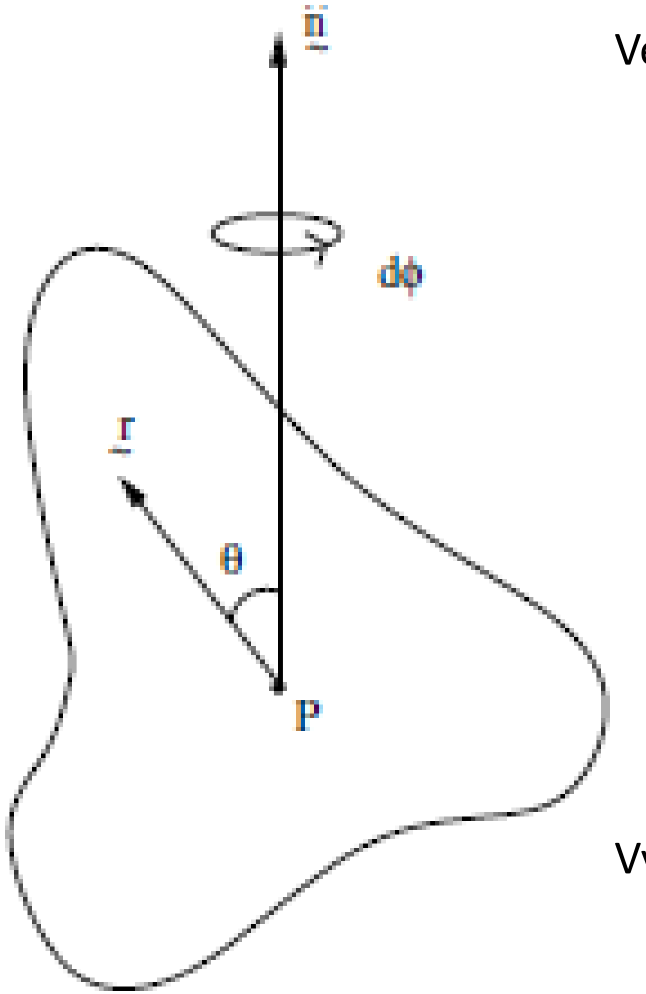
Odtud

$$\frac{d\mathbf{e}_a}{dt} = \epsilon_{acb}\omega_b\mathbf{e}_c = -\epsilon_{abc}\omega_b\mathbf{e}_c = -\mathbf{e}_a \times \mathbf{e}_b\omega_b$$

Definujeme vektor úhlové rychlosti $\mathbf{e}_b\omega_b \equiv \boldsymbol{\omega}$

Pak $$\frac{d\mathbf{e}_a}{dt} = -\mathbf{e}_a \times \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_a$$

Geometrická interpretace: otočení o malý úhel $d\phi$



Velikost posunutí

$$|d\mathbf{r}| = |\mathbf{r}|\, d\phi \sin\theta$$

Sinus naznačuje vektorový součin, když navíc definujeme vektor úhlu ve směru osy

$$d\boldsymbol{\phi} = \hat{\mathbf{n}} d\phi$$

a uvědomíme si, že vektor $d\mathbf{r}$ je kolmý k oběma vektorům

$$d\mathbf{r} = d\boldsymbol{\phi} \times \mathbf{r}$$

Vydělení diferenciálem času dá

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad \boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\phi}}{dt}$$

Tenzor (matice) momentu setrvačnosti ze vztahu pro kinetickou energii soustavy hmotných bodů

$$
\begin{aligned}
T &= \tfrac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_i m_i \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i\right) \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\sum_i m_i \left((\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega})(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_i) - (r_i \cdot \boldsymbol{\omega})^2\right)
\end{aligned}
$$

Poslední krok použitím zavedených symbolu ϵ_{abc} a jeho vlastností

$$(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \epsilon_{abc}\omega_b(\mathbf{r})_c\epsilon_{akl}\omega_k(\mathbf{r})_l = (\delta_{bk}\delta_{cl} - \delta_{bl}\delta_{ck})\omega_b(\mathbf{r})_c\omega_k(\mathbf{r})_l = \omega_b(\mathbf{r})_c\omega_b(\mathbf{r})_c - \omega_b(\mathbf{r})_c\omega_c(\mathbf{r})_b$$

Jednou se spárujou indexy stejných vektorů a jednou opačných vektorů

Poslední vztah pro kinetickou energii $$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i\big((\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega})(\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r}_i) - (\mathbf{r}_i\cdot\boldsymbol{\omega})(\mathbf{r}_i\cdot\boldsymbol{\omega})\big)$$

Upravíme $$(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega})(\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r}_i) = \omega_a\omega_a(\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r}_i)$$

$$(\mathbf{r}_i\cdot\boldsymbol{\omega})(\mathbf{r}_i\cdot\boldsymbol{\omega}) = (\mathbf{r}_i)_{\boldsymbol{a}}\omega_a(\mathbf{r}_i)_{\boldsymbol{b}}\omega_b$$

Takže

$$(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega})(\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r}_i) - (\mathbf{r}_i\cdot\boldsymbol{\omega})(\mathbf{r}_i\cdot\boldsymbol{\omega}) = \omega_a\omega_a(\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r}_i) - (\mathbf{r}_i)_a\omega_a(\mathbf{r}_i)_b\omega_b = \big((\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r}_i)\delta_{ab} - (\mathbf{r}_i)_a(\mathbf{r}_i)_b\big)\omega_a\omega_b$$

a kinetickou energii můžeme psát ve tvaru $T = \frac{1}{2}\omega_a I_{ab}\omega_b$

kde $$I_{ab} = \sum_i m_i\left((\mathbf{r}_i\cdot\mathbf{r}_i)\delta_{ab} - (\mathbf{r}_i)_a(\mathbf{r}_i)_b\right)$$ je tenzor (matice) momentu setrvačnosti

Pro spojité prostředí místo soustavy diskrétních bodů přejde součet v integrál, což bude náš případ

$$I = \int d^3\mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r}) \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

Ať už je soustava bodů diskrétní nebo spojitá, matice I je symetrická a dá se tudíž diagonalizovat ortogonální maticí, tj. existují tři navzájem kolmé osy, pro něž má tvar

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & I_2 & \\ & & I_3 \end{pmatrix}$$

V kapitole jsou příklady geometrických tvarů, ze kterých je náš houbový šroub

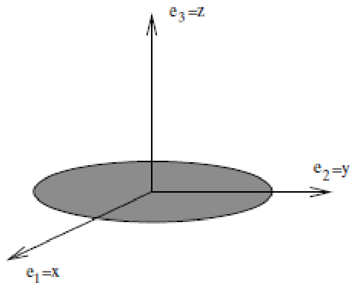
Tyčka:

$$I_1 = \int_{-l/2}^{l/2} \rho\, x^2\, dx = \frac{1}{12} M l^2$$

Disk:

$$I_1 = \int \rho y^2 d^2 x \quad , \quad I_2 = \int \rho x^2 d^2 x$$

$I_1 = I_2$ ze symetrie



$$I_3 = \int \rho(x^2 + y^2) d^2 x$$

$$I_3 = I_1 + I_2 = 2\pi\rho \int_0^r r'^3\, dr' = \tfrac{1}{2} M r^2$$

Tady jsme použili polární souřadnice v kruhově symetrickém případě

$$x^2 + y^2 = r'^2$$

$$d^2 x = 2\pi r' dr'$$

Moment setrvačnosti se objeví taky ve vztahu pro moment hybnosti

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L} &= \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i \\
&= \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \\
&= \sum_i m_i (r_i^2 \boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_i)\mathbf{r}_i) \\
&= I\boldsymbol{\omega}
\end{aligned}
$$

Dvojitý vektorový součin upravíme podobně jako skalární součin dvou vektorových součinů v kinetické energii

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \epsilon_{abc}\mathbf{e}_a(\mathbf{r})_b\epsilon_{ckl}\omega_k(\mathbf{r})_l = (\delta_{ak}\delta_{bl} - \delta_{al}\delta_{bk})\mathbf{e}_a(\mathbf{r})_b\omega_k(\mathbf{r})_l = \mathbf{e}_a(\mathbf{r})_b(\omega_a(\mathbf{r})_b - \omega_b(\mathbf{r})_a) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})$$

Ve složkách $L_a = I_{ab}\omega_b$

V soustavě hlavních os $L_1 = I_1\omega_1$ atd., takže $\mathbf{L} = I_1\omega_1\mathbf{e}_1 + I_2\omega_2\mathbf{e}_2 + I_3\omega_3\mathbf{e}_3$

Moment setrvačnosti závisí na bodu, vůči kterému ho počítáme

Parallel axis theorem $$(I_{\mathbf{c}})_{ab} = (I_{c.of.m})_{ab} + M(c^2\delta_{ab} - \mathbf{c}_a\mathbf{c}_b)$$

Moment setrvačnosti kolem libovolného bodu je roven momentu setrvačnosti kolem těžiště,
plus momentu setrvačnosti těžiště, do nějž je soustředěna veškerá hmota

Důkaz využívá toho, že z definice polohy těžiště $\mathbf{c} = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i}$ plyne $\sum_i m_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{c}) = 0$

Stejně tak ho využívá oddělení kinetické energie posuvného pohybu těžiště a rotace kolem těžiště

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 \\ &= \sum_i m_i \left[\tfrac{1}{2}\dot{\mathbf{R}}^2 + \dot{\mathbf{R}} \cdot (\omega \times \Delta\mathbf{r}_i) + \tfrac{1}{2}(\omega \times \Delta\mathbf{r}_i)^2\right] \\ &= \tfrac{1}{2}M\dot{\mathbf{R}}^2 + \tfrac{1}{2}\omega_a I_{ab}\omega_b \end{aligned}$$

protože $\Delta\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i - \mathbf{c}$

Nejjednodušší případ pro volné těleso $$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$$

V souřadné soustavě spojené s tělesem

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{dL_a}{dt}\,\mathrm{e}_a + L_a\,\frac{d\mathrm{e}_a}{dt} \\ &= \frac{dL_a}{dt}\,\mathrm{e}_a + L_a\,\boldsymbol{\omega}\times\mathrm{e}_a \end{aligned}$$

V soustavě hlavních os

$$I_1\dot{\omega}_1\mathbf{e}_1 + I_2\dot{\omega}_2\mathbf{e}_2 + I_3\dot{\omega}_3\mathbf{e}_3 + (\omega_1\mathbf{e}_1 + \omega_2\mathbf{e}_2 + \omega_3\mathbf{e}_3)\times(I_1\omega_1\mathbf{e}_1 + I_2\omega_2\mathbf{e}_2 + I_3\omega_3\mathbf{e}_3) = 0$$

Jednotlivé složky dají tři Eulerovy rovnice

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + \omega_2\omega_3(I_3 - I_2) &= 0 \\ I_2\dot{\omega}_2 + \omega_3\omega_1(I_1 - I_3) &= 0 \\ I_3\dot{\omega}_3 + \omega_1\omega_2(I_2 - I_1) &= 0 \end{aligned}$$

Pro úhlovou rychlost ve směru hlavní osy se úhlová rychlost nemění, jinak pohyb složitější

V našem případě osová symetrie $$I_1 = I_2 \neq I_3$$

Pak se rovnice zjednoduší

$$I_1\dot{\omega}_1 = \omega_2\omega_3(I_1 - I_3)$$
$$I_2\dot{\omega}_2 = -\omega_1\omega_3(I_1 - I_3)$$
$$I_3\dot{\omega}_3 = 0$$

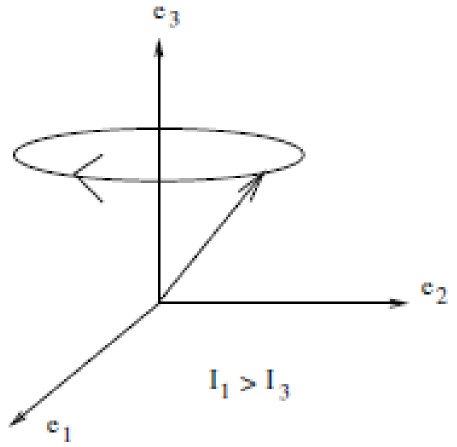
Takže ω_3 se nemění v čase a pro ostatní dvě složky úhlové rychlosti máme

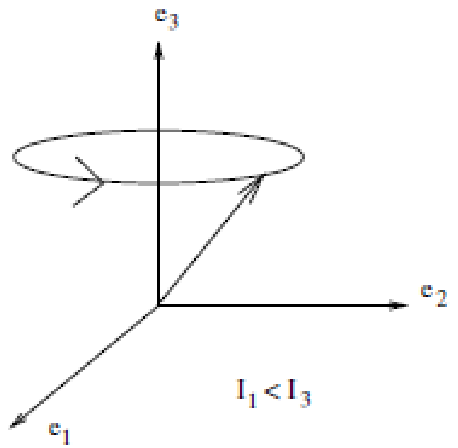
$$\dot{\omega}_1 = \Omega\omega_2 \quad , \quad \dot{\omega}_2 = -\Omega\omega_1$$

Tedy dostáváme precesi s úhlovou rychlostí $$\Omega = \omega_3(I_1 - I_3)/I_1$$

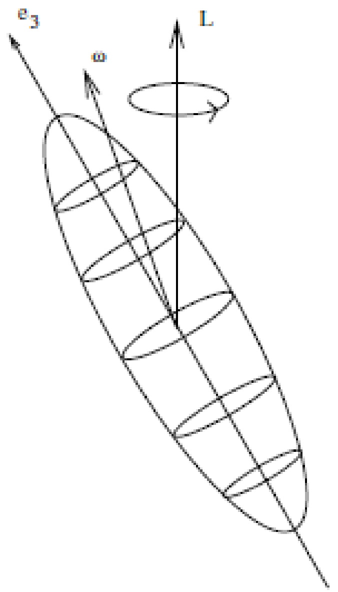
neboť řešení je $$(\omega_1, \omega_2) = \omega_0(\sin\Omega t, \cos\Omega t)$$

Směr precese závisí na tvaru





V inerciální soustavě se precese a rotace složí a vznikne wobble



V našem případě máme gravitační sílu, která sama nemá žádný moment,
ale při pohybu po nakloněné rovině dává vzniknout třecím silám, které už moment mají

Tahle analýza kapitoly Davida Tonga dává první kroky ve směru k analýze komplikovaného pohybu šroubu.