

## Svíčka ve vodě

**Zadání úlohy:** Add some weight to a candle such that it barely floats in water. As the candle burns, it may continue to float. Investigate and explain this phenomenon.

Zatížte svíčku tak, aby sotva plovla ve vodě. Když pak svíčka odhořívá, může se stát, že bude dál plovat. Prozkoumejte a vysvětlete tento jev.



### Úvod

Zdánlivým paradoxem věčně plovoucí svíčky se pravděpodobně poprvé zabýval Arthur Good (působící pod pseudonymem Tom Tit). Tento vědecký pedagog publikoval na konci 19. století do francouzského časopisu *L'Illustration* sérii článků s názvem *La Science Amusante*, ve které představoval různé zajímavé fyzikální pokusy, a jedním z nich byl právě paradox nepotopitelné svíčky pojmenovaný *Un singulier bougeoir*. V pozdějších letech bylo o tomto jevu napsáno mnoho literatury, mimo jiné také článek s názvem *The paradox of the floating candle that continues to burn* [1] od autorů S. Theodorakis and C. Aristidou, kteří jej publikovali v *American Journal of Physics* v roce 2012. V naší práci se pokusíme teoreticky i experimentálně objasnit problém věčně plovoucí svíčky. Budeme se zabývat kvantitativním popisem pro dané specifické podmínky, především pro velký poloměr svíčky, kde využijeme a teoretický model vytvořený autory článku [1], a dále přinášíme kvalitativní rozbor chování svíček s různou velikostí při různých okolních podmínkách.

### Základní popis paradoxu

V naší práci se budeme zabývat výhradně parafínovými svíčkami. Parafín má nižší hustotu než voda. Jestliže na spodní část svíčky připevníme závaží s větší hustotou než voda tak, aby svíčka sotva plovla, celé těleso (svíčka a závaží) bude mít hustotu přibližně stejnou jako voda. Při odhořívání svíčky se bude v tělese snižovat množství parafínu, tedy se hustota celého tělesa by se měla zvyšovat a svíčka by měla klesnout ke dnu. Ve skutečnosti se toto neděje, pozorujeme ovšem zcela jiný jev. Svíčka buď zůstává plovat na hladině, nebo se pomalu vynořuje nad vodu.

## Hustota v čase

Svíčku budeme v naší práci považovat za těleso tvaru válce, jehož výška je mnohem větší než poloměr. Plamen svíčky budeme považovat za radiálně symetrický zdroj tepla poskytující tepelný tok konstantní v čase, který je v polokouli tvořící spodní část plamene homogenní a roste s vyšší polohou na knotu. Teplo jím vyprodukované ohřívá a taví parafín okolo knotu, který je dále nasáván do knotu, kde shoří. Rychlost hoření budeme považovat za konstantní v čase – časový úbytek hmotnosti (derivace hmotnosti podle času) bude tudíž také konstantní.

Označme:

- $\dot{m}$  Časový úbytek hmotnosti
- $\rho_P$  Hustota parafínu
- $\rho_V$  Hustota vody
- $R$  Poloměr svíčky
- $m_0$  Počáteční celková hmotnost tělesa (svíčka + závaží)
- $V_0$  Počáteční celkový objem tělesa (svíčka + závaží)

Přičemž platí:  $\rho_P < \frac{m_0}{V_0} = \rho_V$  (1)

**Předpoklad 1:** Svíčka hoří rovnoměrně shora dolů.

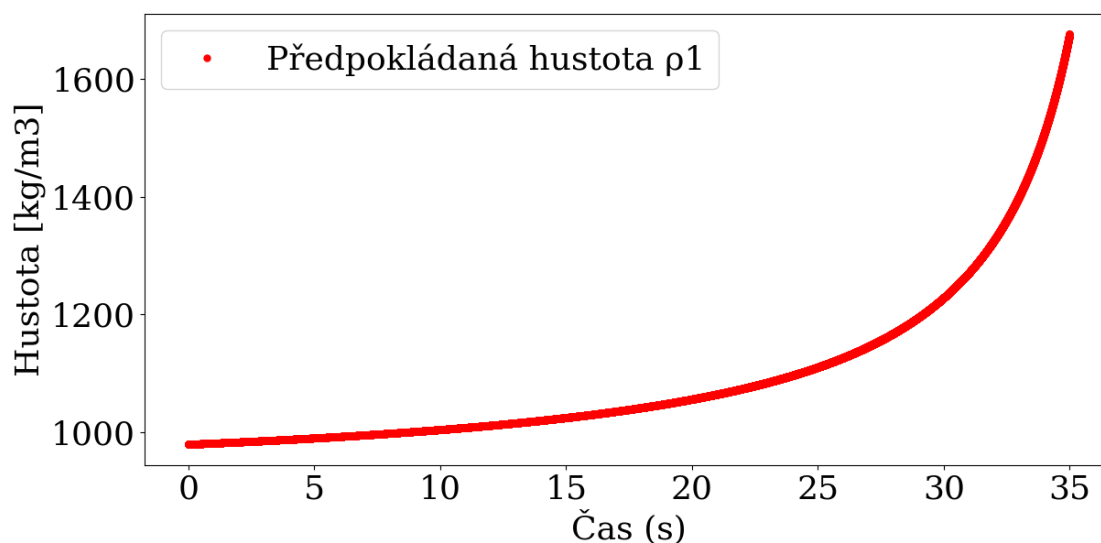
Hustotu celého tělesa v čase můžeme nyní vyjádřit jako poměr celkové hmotnosti a celkového objemu:

$$\rho_1(t) = \frac{m_0 - \dot{m} \cdot t}{V_0 - \dot{V} \cdot t}$$

kde  $\dot{V}$  (úbytek objemu v čase) lze vyjádřit jako  $\frac{\dot{m}}{\rho_P}$ :

$$\rho_1(t) = \frac{m_0 - \dot{m} \cdot t}{V_0 - \frac{\dot{m}}{\rho_P} \cdot t} \quad (2)$$

Graf 1 – Předpokládaný vývoj hustoty tělesa v čase



Pro hodnoty odpovídající stavu (1) je funkce  $\rho_1(t)$  rostoucí, jak jsme předpokládali, tedy svíčka by se zanedlouho potopila.

**Předpoklad 1** je ovšem **nesprávný**, neboť teplo se z plamene šíří do svíčky radiálně, tedy uprostřed svíčky okolo paty knotu se tvoří přibližně půlkruhová jamka, z části vyplněná parafínem a z části vzduchem. Zavedme nyní pojem *kritický poloměr* ( $r_{KRIT}$ ) – vzdálenost od knotu, za níž veškerý parafín zůstává pevný. Tato vzdálenost je závislá na tom, jestli je svíčka ve vodě či ve vzduchu, přesněji jak vysoko nad vodou je její vrchní okraj; kromě toho je také závislá na samotném poloměru svíčky  $R$  (protože voda odvádí teplo rychleji než parafín samotný, pro zmenšující se  $R$  se  $r_{KRIT}$  blíží k hodnotě  $R$ , ne ovšem limitně). Kromě toho samozřejmě závisí na teplotě okolní vody (a na mnoha jiných podmínkách, kterými se v naší práci nebudeme zabývat). Tedy  $r_{KRIT} = r_{KRIT}(R, h, T_v)$ , kde  $h$  je výška horního konce svíčky nad hladinou vody a  $T_v$  je teplota vody.

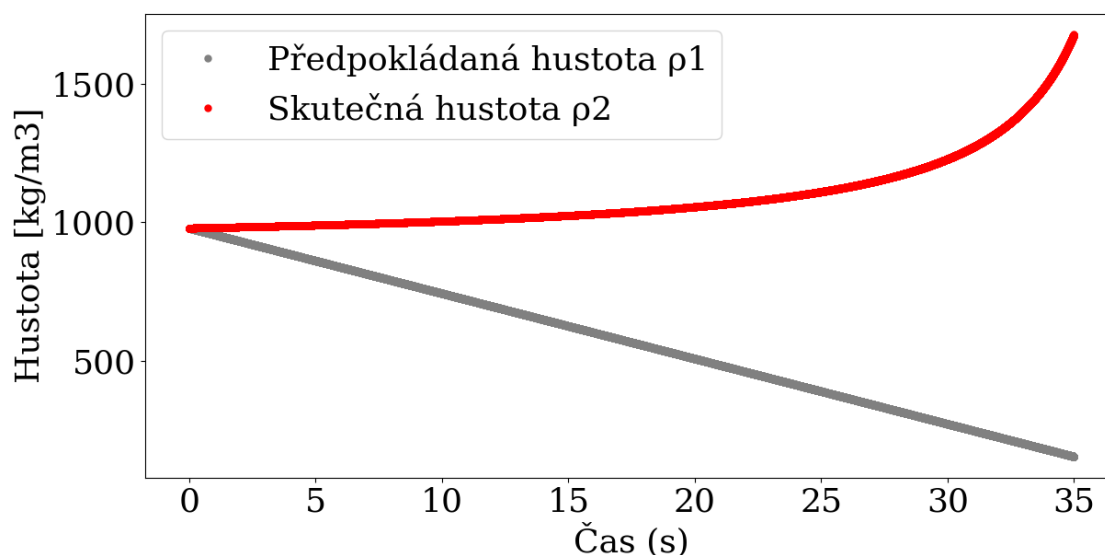
Nyní popis rozdělíme na 2 oddíly podle toho, jestli je poloměr svíčky  $R$  větší či menší než  $r_{KRIT}$  ve vodě.

**Nadkritický poloměr ( $R > r_{KRIT}(R)$ )**

V tomto případě se objem ponořené části tělesa tedy s časem nemění a hustotu celého tělesa lze vyjádřit jako:

$$\rho_2(t) = \frac{m_0 - \dot{m} \cdot t}{V_0} \quad (3)$$

Graf 2 – Předpokládaný a skutečný vývoj hustoty tělesa v čase



Tato funkce je s časem klesající a svíčka se tudíž bude pomalu vynořovat nad hladinu.

Nyní označme písmenem  $h$  kolmou vzdálenost vrchního okraje svíčky a hladiny vody. Za použití předpokladu 2 můžeme nalézt funkci  $h(t)$  (pro jednoduchost předpokládejme, že povrchová síla působí kolmo dolů):

$$F_{\text{tíhová}} + F_{\text{povrchová}} = F_{\text{vztlaková}}$$

$$(m_0 - \dot{m} \cdot t)g + \sigma \cdot 2\pi R = [V_0 - h(t) \cdot \pi R^2] \rho_V g$$

$$h(t) = \frac{\dot{m}}{\pi R^2 \rho_V} t + \frac{V_0 \rho_V g - m_0 g - 2\sigma \pi R}{\pi R^2 \rho_V g} \quad (4)$$

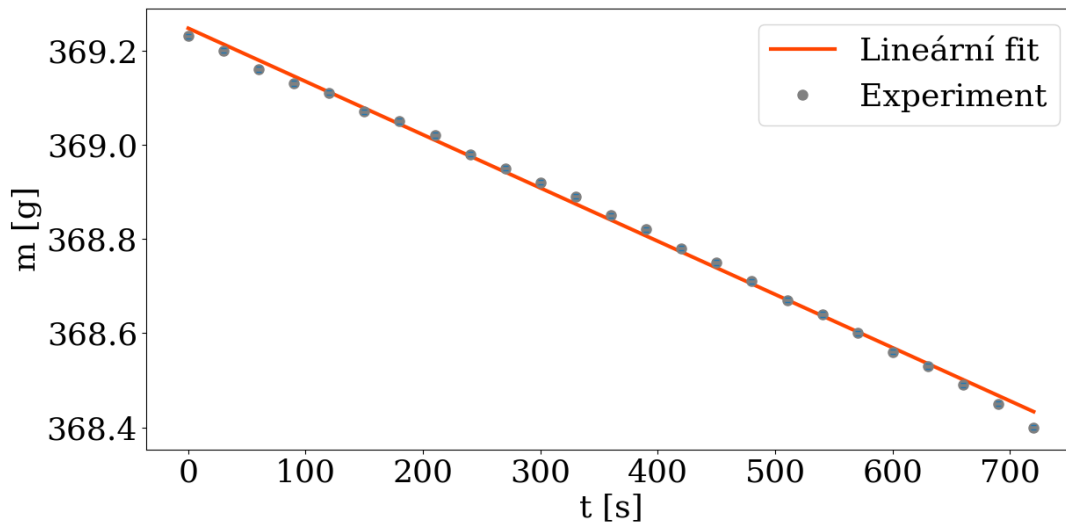
(Je třeba dodat, že pro interval  $t \in \langle 0; \frac{2\sigma\pi R}{\dot{m}g} \rangle$  platí:  $h(t) = 0$ . Také si všimněme, že tučně vyznačený výraz by měl být roven 0, pokud by na počátku svíčka sotva plovla ve vodě, avšak v našem experimentu nejsme schopni dosáhnout naprosto přesně tohoto stavu)

Tento teoretický model jsme ověřili experimentem. Pro jeho účely bylo potřeba změřit časový úbytek hmotnosti  $\dot{m}$ .

### Časový úbytek hmotnosti

Pro účely následujících experimentů jsme použili svíčku o délce  $(15,0 \pm 0,1)$  cm a poloměru  $R = (3,475 \pm 0,01)$  cm. Pomocí analytické váhy jsme nejprve změřili, jak se mění hmotnost svíčky v čase. Jestliže předpokládáme konstantní  $\dot{m}$  tedy  $\ddot{m} = 0$ , platí potom, že  $m(t) = at + b$ , kde  $\dot{m} = a$ . Naměřenou závislost  $m(t)$  jsme tedy proložili lineárním fitem  $m(t) = at + b$ .

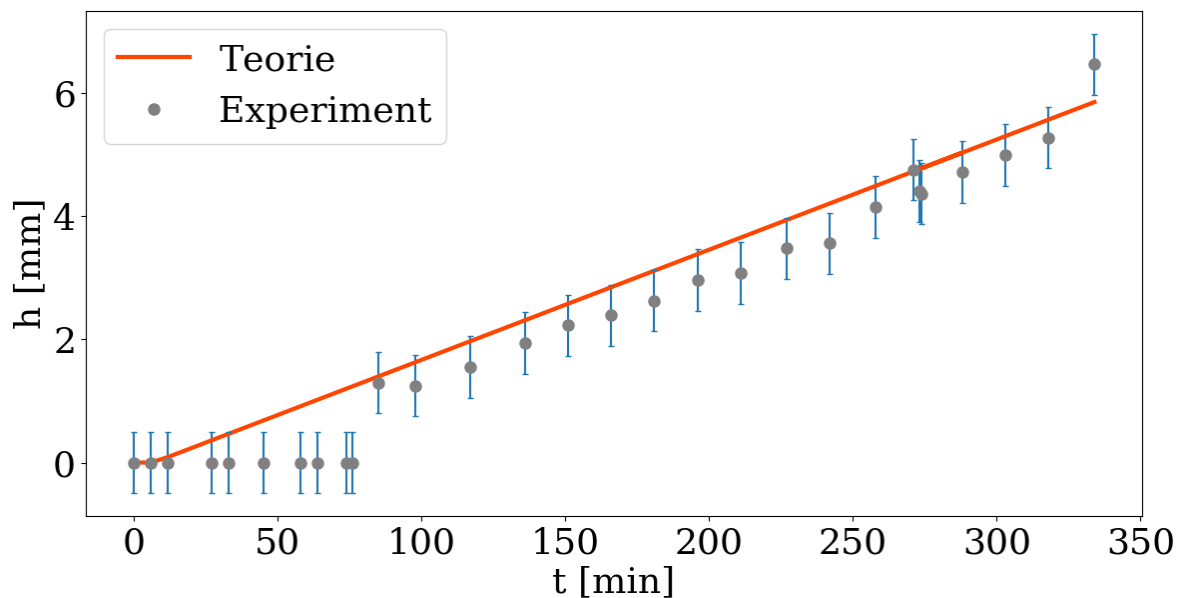
Graf 3 – Ztráta hmotnosti v čase



Hodnota  $|a|$  je určena fitem na  $(0,00113 \pm 0,00001) \text{ g/s} = (0,0678 \pm 0,0006) \text{ g/min}$ .

Svíčku ponořenou ve vodě v odměrném válci jsme zapálili a snímali fotoaparátem. Pro analýzu snímků jsme využili program Tracker. Na následujícím grafu vidíte porovnání naší teoretické predikce  $h(t)$  (4) s experimentem.

Graf 4 - Závislost výšky vyoření svíčky na čase



Dosazené hodnoty:  $R = (3,475 \pm 0,01) \text{ cm}$ ,  $m_0 = (461,91 \pm 0,01) \text{ g}$ ,  $V_0 = (470 \pm 20) \text{ ml}$ ,  $\dot{m} = (0,0678 \pm 0,0006) \text{ g/min}$ ,  $\rho_v = 998 \text{ kg/m}^3$ ,  $\sigma = (0,0728 \pm 0,0001) \text{ N/m}$

Chybové úsečky znázorňují rozlišovací schopnost, která je snížena kvůli nepravidelnostem rozhraní mezi vodou a svíčkou. Vidíme, že až na drobné posunutí, které je stále v rámci chyby, sklon naměřené závislosti téměř naprosto přesně odpovídá předpovědi.

### Podkritický poloměr ( $R < r_{KRIT}(R)$ )

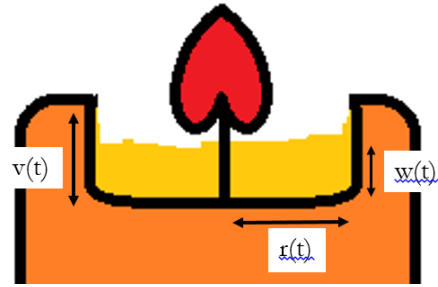
V tomto případě se po chvíli hoření parafín na okrajích roztaví a steče dolů do jamky. Celková hustota systému se tedy sníží a svíčka by měla klesnout ke dnu. V důsledku kapilárních jevů se voda okolo svíčky zakříví a povrchová síla, působící nyní vzhůru, drží svíčku na hladině. Pokud by odhořel další parafín z okrajů, snížila by se hustota natolik, že by byla překonána povrchová síla a svíčka by klesla. Jakmile se ovšem v této situaci roztaví některá část parafínu na okraji, kde je v kontaktu s vodou, povrchová síla „vytáhne“ roztavený parafín vzhůru podél zakřivení vody, čímž na hladině vytvoří jakýsi jazyk, který může měřit až několik centimetrů. Při tomto rychlém procesu koncová část jazyku ochlazením od vody ztuhne a počáteční část nabírá nový roztavený parafín z jamky. Tímto způsobem se nejen obnoví původní výška svíčky (tedy i její objem a vztlaková síla), ale zároveň se kolem ní vytvoří kotouč z tuhého parafínu, který výrazným způsobem zvyšuje povrchovou sílu.



## Studie jamky

V této části se budeme zabývat tím, jakým způsobem se formuje jamka okolo knotu. Přinášíme především experimentální popis klíčových parametrů jamky.

### I. Poloměr svíčky je výrazně větší než kritický poloměr



#### I.I Teoretický model

Pro dostatečně velký  $R$  ( $R \gg r_{KRIT}$  ( $R$ )) lze aproximovat tvar jamky na válcovitou ([1]). (Fotka). Označme nyní poloměr jamky  $r$ , její hloubku  $v$  a hloubku kapalného parafínu v ní  $w$  (Viz nákres). Theodorakis a Aristidou ve svém článku přináší teoretický model (za využití výše uvedených předpokladů), jehož výsledkem jsou tři funkce  $r(t)$ ,  $v(t)$  a  $w(t)$ . Funkci poloměru jamky v čase uvádějí takto:

$$r(t) = r_{KRIT} - (r_{KRIT} - r_0)e^{-\kappa t} \quad (5)$$

kde  $r_0$  je poloměr, který se vytvoří již při zapálení svíčky a  $\kappa$  je převrácená hodnota konstanty určující čas, za který se roztaví parafín o tloušťce  $r_{KRIT}$  a jednotkovém obsahu. Podle této funkce se tedy poloměr jamky exponenciálně blíží ke kritickému poloměru.

Pro příliš velký poloměr  $R$  je tento vztah nepřesný, protože  $r_{KRIT}$  (na vrchu svíčky) závisí na výšce horního okraje svíčky od vodní hladiny ( $h$ ). Tepelná vodivost vzduchu ( $0,02 \text{ W/mK}$  [3]) je výrazně menší než tepelná vodivost vody ( $0,59 \text{ W/mK}$  [3]), a tepelný tok ze svíčky je na vzduchu menší, teplo se tudíž pomaleji odvádí a  $r_{KRIT}$  je větší. Pro zjednodušení (a nízké hodnoty  $h$ ) předpokládejme lineární závislost:

$$r_{KRIT}(h) = \alpha h + \beta \quad (6)$$

kde  $h$  se s časem mění ( $h = h(t)$ ).

Dosazením za  $h(t)$  z (4) dostáváme:

$$r_{KRIT}(t) = \alpha \frac{\dot{m}}{\pi R^2 \rho_V} t - \alpha \frac{2\sigma}{R \rho_V g} + \beta$$

Tedy dosazením tohoto vztahu do (5) dostáváme:

$$r(t) = \alpha \frac{\dot{m}}{\pi R^2 \rho_V} t - \alpha \frac{2\sigma}{R \rho_V g} + \beta - \left( \alpha \frac{\dot{m}}{\pi R^2 \rho_V} t - \alpha \frac{2\sigma}{R \rho_V g} + \beta - r_0 \right) e^{-\kappa t}$$

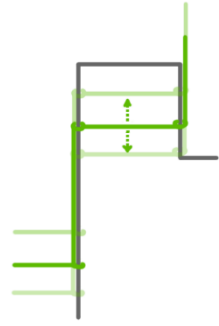
Jednodušeji zapsáno jako součet známých funkcí:

$$r(t) = \left[ -\alpha \frac{\dot{m}}{\pi R^2 \rho_V} t e^{-\kappa t} \right] + \left[ \left( \alpha \frac{2\sigma}{R \rho_V g} - \beta + r_0 \right) e^{-\kappa t} \right] + \left[ \alpha \frac{\dot{m}}{\pi R^2 \rho_V} t \right] + \left[ -\alpha \frac{2\sigma}{R \rho_V g} + \beta \right] \quad (7)$$

#### I.II Experiment

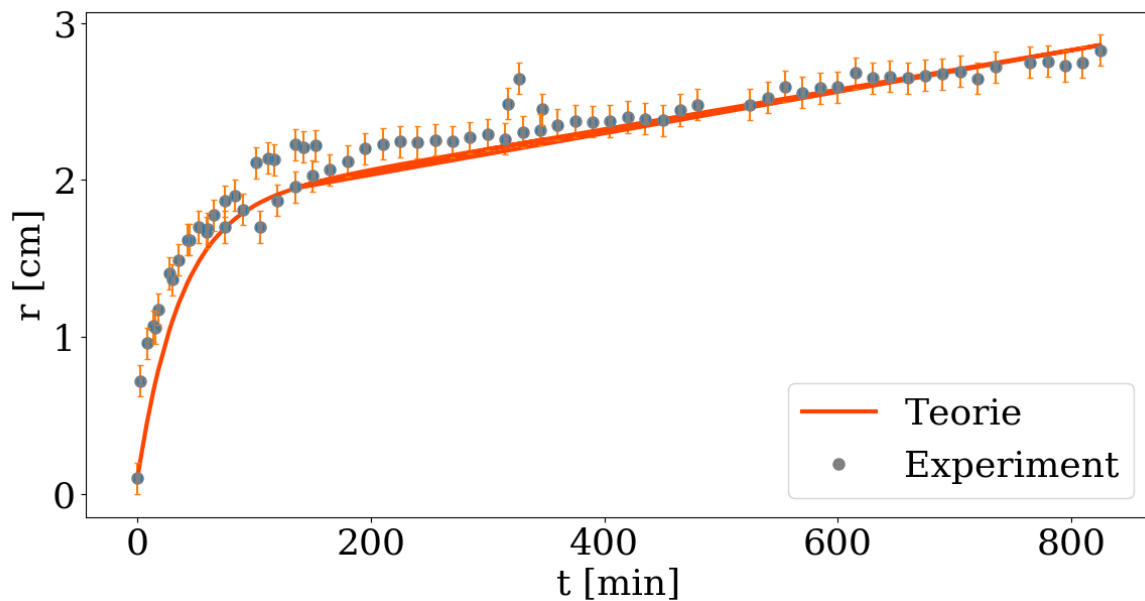
V tomto experimentu jsme využili 2 svíčky o poloměrech  $R1 = (3,475 \pm 0,005)\text{cm}$  a  $R2 = (2,500 \pm 0,005)\text{cm}$ . Ponořili jsme každou svíčku do válcové nádoby s vodou o poloměru o něco větším než  $R$ . V pravidelných intervalech (15 a 7,5 minut) jsme měřili  $r$  pomocí posuvného měřidla.

Hodnoty  $u$  a  $w$  jsme měřili s pomocí vlastního měřidla – drátkového posuvníku. Tento se skládá z 2 kusů železného drátu, které se po sobě volně pohybují (viz obr.). Spodní konec jsme vnořili až na dno jamky, na něj se zachytila vrstvička kapalného parafínu ( $w$ ). Vodorovnou část jsme posunuli k vršku svíčky a tím jsme změřili  $u$ . Celý experiment trval více než 13 hodin nepřetržitého měření.



Na následujícím grafu je znázorněna naměřená závislost  $r(t)$  v porovnání s teoretickou předpovědí (7), kde parametry  $\alpha$ ,  $\beta$  a  $\kappa$  jsou volně fitované.

Graf 5 – Vývoj poloměru jamky v čase

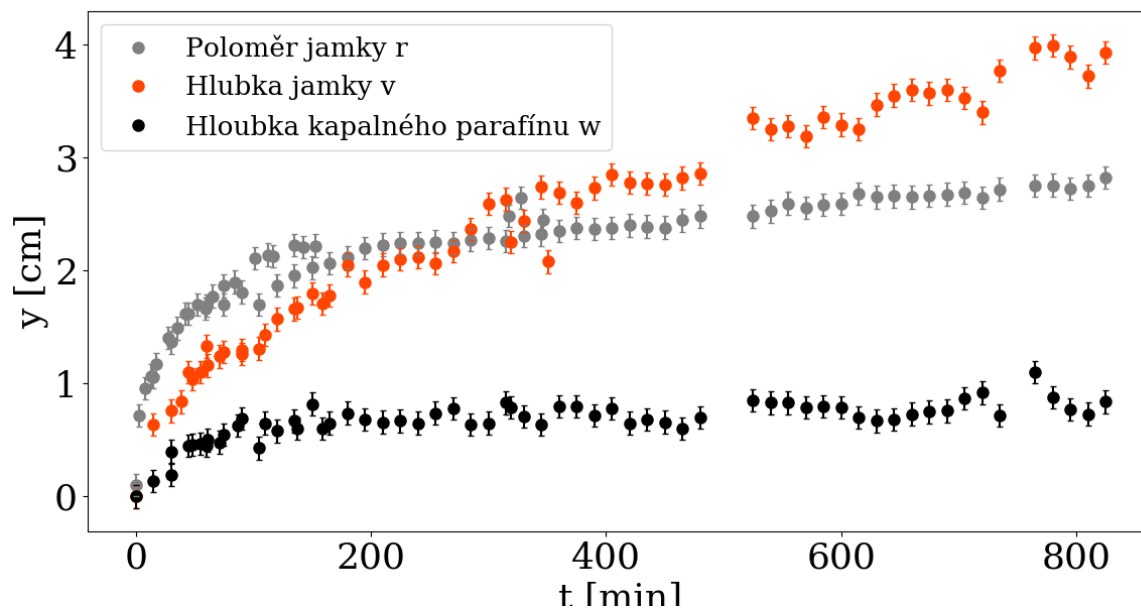


Vidíme, že naměřené hodnoty relativně odpovídají teorii, až na občasné výchytky. Nepřesnosti z části pocházejí ze skutečnosti, že knot svíčky je ohnutý na určitou stranu, tudíž plamen není dokonale středově souměrný, a tudíž i jamka není přesně kruhová. Na různých místech byl proto poloměr  $r$  různý.



A takto vypadá naměřené závislost všech 3 parametrů jamky:

Graf 6 – Vývoj parametrů jamky v čase

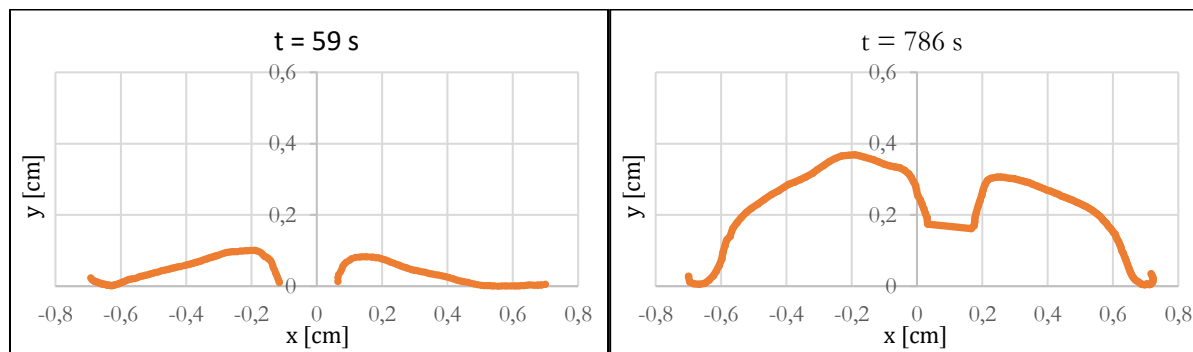


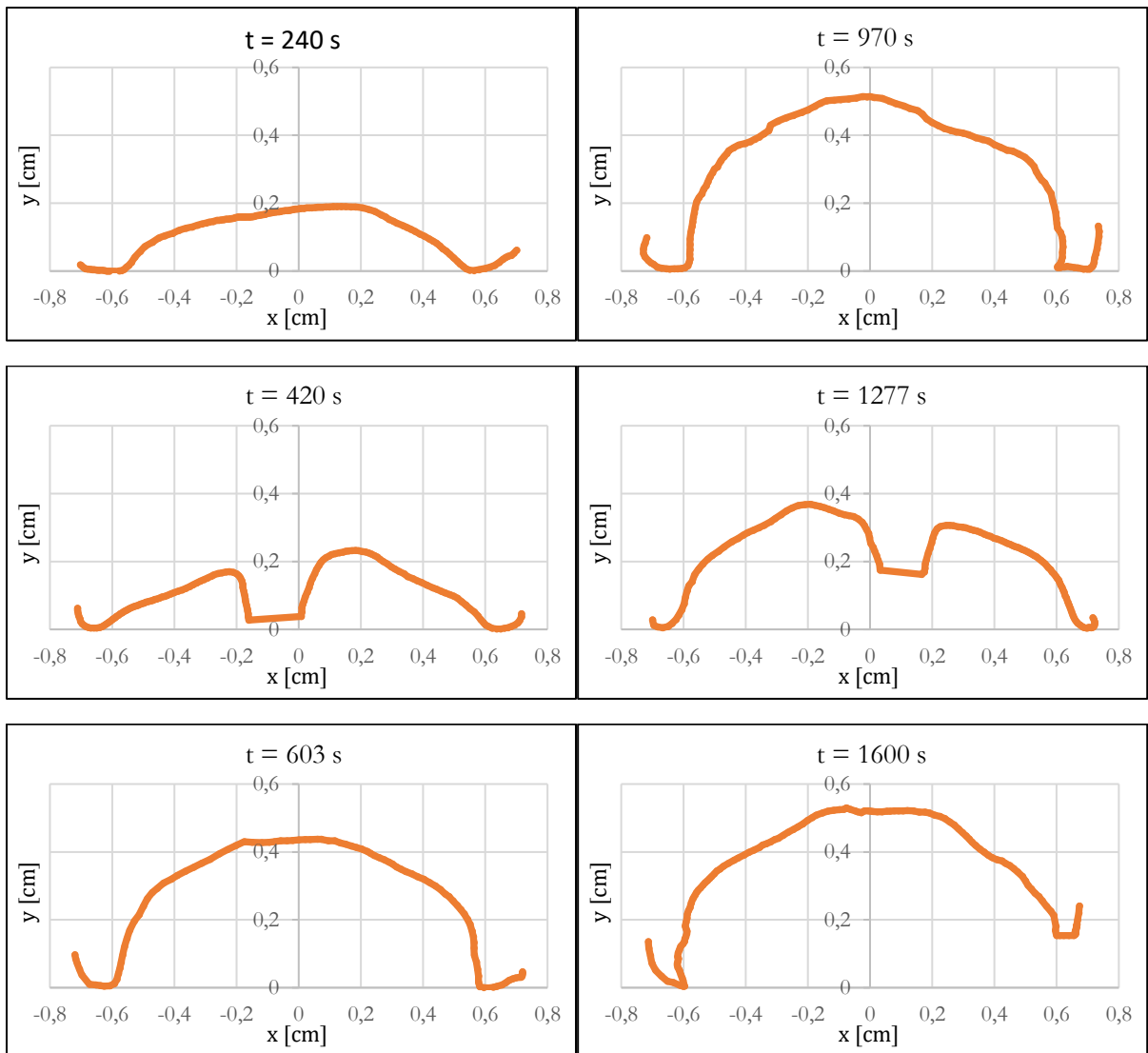
Směrnice tečen okolo  $t = 0$  jsou pro poloměr i hloubku podobné – odpovídá rovnoměrnému radiálnímu šíření tepla při rovnoměrném tepelném toku z plamene. Naopak v pokročilém čase mají obě tyto funkce šikmé asymptoty, pro něž platí, že derivace jejich součtu je rovna  $\dot{m}$ . Hlubka kapalného parafínu konverguje přibližně ke konstantní hodnotě.

## II. Poloměr svíčky se blíží $r_{KRIT}$

Pro menší poloměry (ale stále větší než  $r_{KRIT}$ ) není aproximace tvaru jamky na válec funkční. Jamka má v takovém případě spíše tvar polokoule (či poloviny rotačního elipsoidu). V následujícím experimentu jsme zkoumali tento tvar jamek.

Použili jsme 8 svíček o  $R = (1,43 \pm 0,01)$  cm, které jsme najednou zapálili a po různých časových intervalech jsme je postupně zhasěli. Po vychladnutí jsme u každé z nich provedli vertikální řez středem svíčky pomocí nažhaveného nože, vzniklé řezy jsme nafotili a v programu Tracker provedli analýzu tvaru. Na následujících grafech tedy můžete vidět, jak se vyvíjí tvar jamky v čase:





V některých grafech je uprostřed prohlubně zřetelný hranatý pík – jedná se o patu knotu, k níž parafín vzlínal. Na posledním grafu ( $t = 1600$ ) vidíme, že někdy mezi 21 a 26 minutami hoření začaly okraje svíčky na vzduchu odhořívát, pravý okraj jamky je totiž podstatně níž (plamen je často nakloněný k jedné straně) a levý okraj je ostrý (tupý okraj značí, že stále ještě zbyla část horní podstavky svíčky neroztavená).

## Numerická simulace

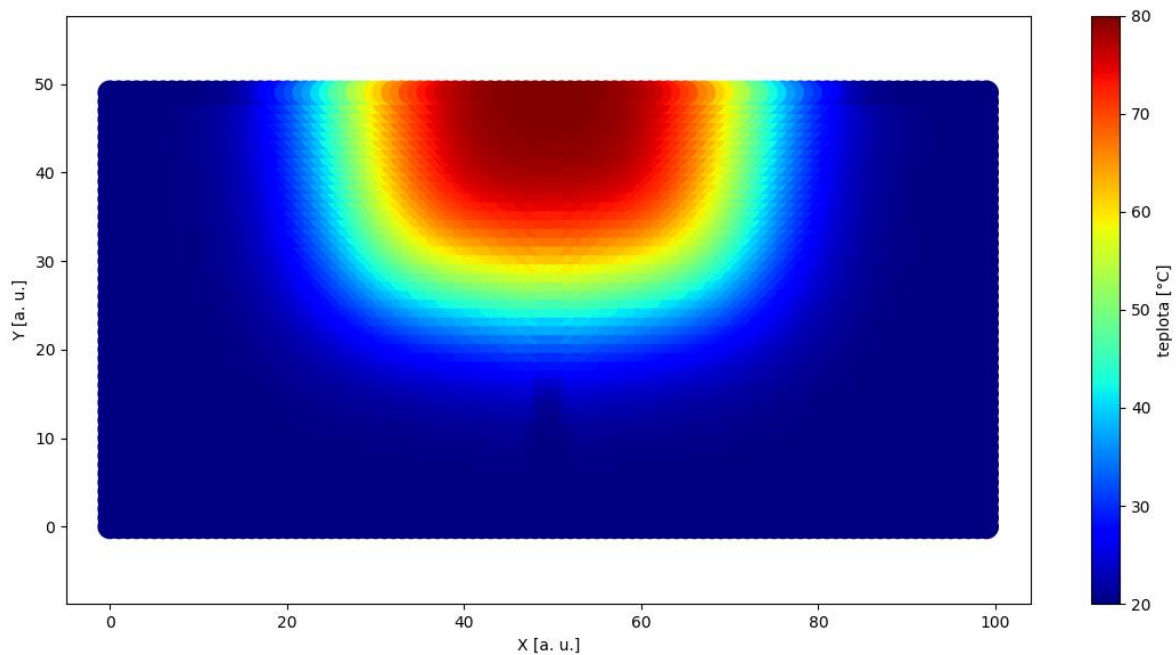
Abychom dokázali dobře popsat přesné šíření tepla ve svíčke, a tím i formování jamky, vytvořili jsme vlastní prostorovou numerickou simulaci v jazyce Python. Základem je čtvercová mřížka uzlových bodů, kde každý z nich má danou teplotu. Ke spočítání procesu přenosu tepla mezi jednotlivými uzlovými body využíváme Fourierův zákon pro jednorozměrný prostor:

$$q = \frac{dT}{dt} = -k\nabla T = -k \frac{T_2 - T_1}{x}$$

kde T je teplota, x je vzdálenost sousedních uzlových bodů a k je tepelná vodivost.

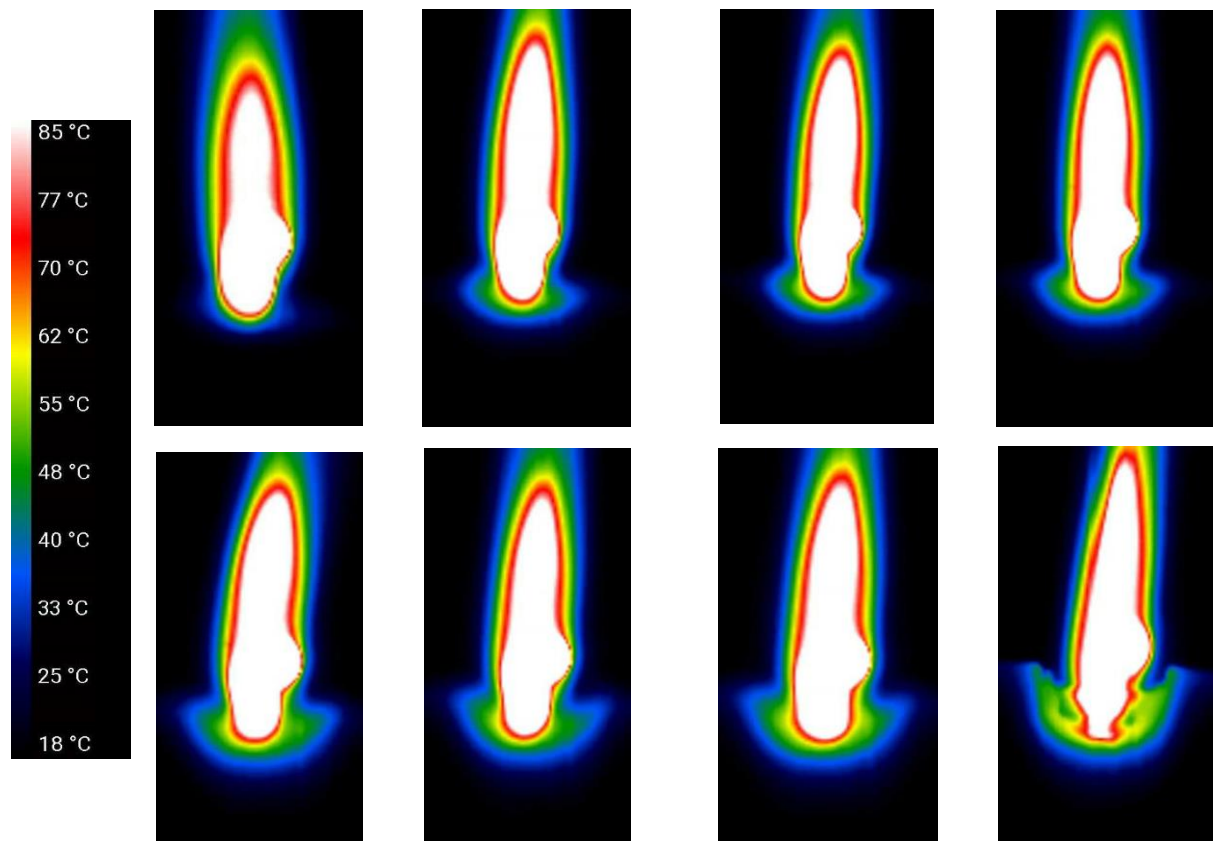
Simulace je funkční pro šíření tepla v samotné svíčke. Je ještě potřeba doměřit dílčí konstanty, například konstantu popisující odvod tepla ze svíčky.

### Ukázka simulace



## Experiment s IR kamerou

Pro bezkontaktní výzkum tvaru jamky jsme provedli následující experiment: Svíčku jsme podélně rozřízli a vodotěsně upevnili v nádobě s vodou (viz obr). Pomocí infračervené kamery jsme snímali, jak se ve svíčce šíří teplo, když je ponořena do vody. Tento průběh šíření tepla je zřetelně vidět na následujících fotografiích.

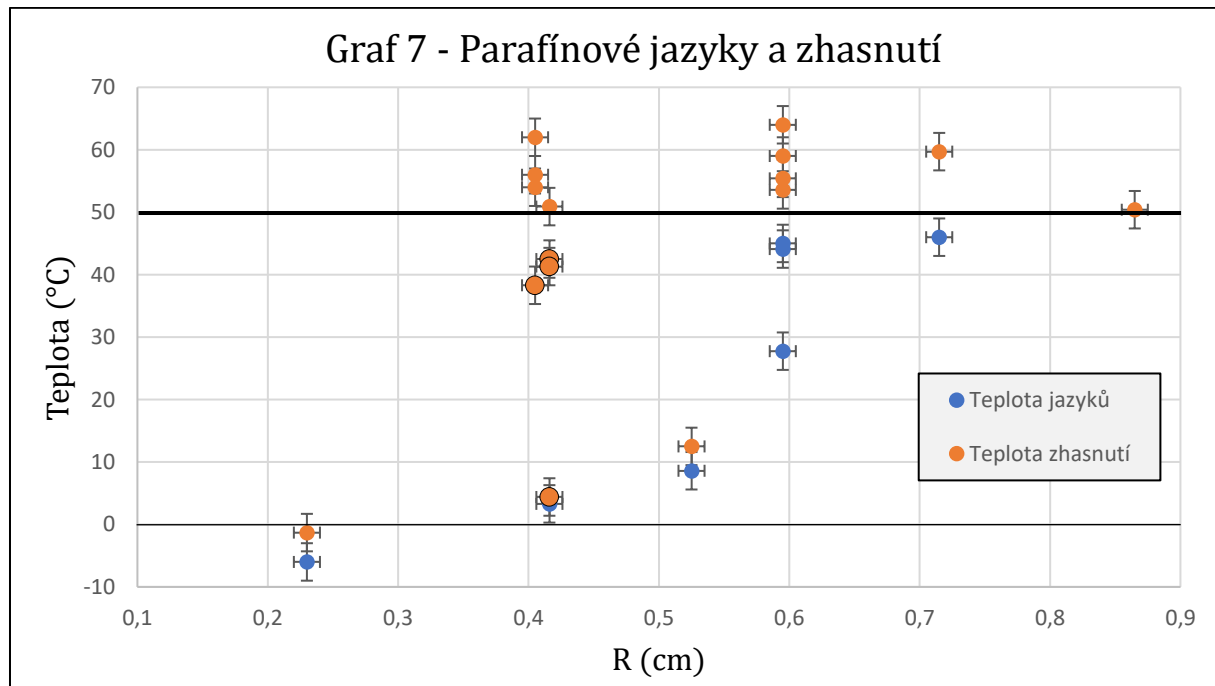


## Svíčky s podkritickým poloměrem

Kolem svíček, jejichž poloměr  $R$  je menší než jejich kritický poloměr ve vodě ( $R < r_{KRIT}(R)$ ), vznikají na hladině tzv. parafinové jazyky (viz výše). Tento stav je ovšem nestabilní, neboť do parafinového kotouče okolo svíčky může skulinou vniknout voda, a i nepatrné množství vody v jamce může způsobit zhasnutí (tomuto jevu částečně brání hydrofobní vlastnosti parafinu). Také se může stát, že kvůli nedostatku kyslíku v příliš úzké a hluboké jamce se plamen udusí.

Rozhodli jsme se prozkoumat, jak závisí kritický poloměr svíčky na teplotě. Jinými slovy, při jaké teplotě se pro různé poloměry svíček parafín na okraji roztaví (což je právě bod, kdy  $r_{KRIT} = R$ ), a začnou se tvořit parafinové jazyky nebo kotouč. Tedy jsme využili svíčky o 6 různých poloměrech, přičemž od každého poloměru jsme měřili několik svíček, ponořili je zatížené do vody a pomalu zvyšovali teplotu vody. Protože (jak jsme ověřili v kapitole Studium jamky) poloměr jamky  $r$  se v čase exponenciálně blíží k  $r_{KRIT}$ , nemusíme při tomto experimentu brát čas, po jaký svíčka hoří, vůbec v úvahu, pokud před zvyšováním teploty počkáme dostatečně dlouhou dobu (u těchto malých svíček přibližně do 10 minut). Také jsme přitom změřili, jestli daná svíčka zhasne a při jaké teplotě.

Výsledky pokusu jsme zobrazili v následujícím grafu:



Tučnou čarou je vyznačena teplota 50 °C, při které se začínají tavit některé složky parafínu, a tudíž začíná být chování svíček chaotické. Méně tučnou čarou je vyznačena teplota tuhnutí vody. Nicméně, abychom mohli prozkoumat širší škálu poloměrů, podařilo se nám získat a použít přechlazenou vodu, a to až do teploty -12,5 °C.

Z grafu vidíme, že ačkoli trend modrých bodů je rostoucí, závislost teploty zhasnutí je poněkud chaotická. To je hlavně dáno tím, že většina svíček zhasla až při teplotě větší než 50 °C. Černě vyznačené body představují svíčky, které zhasly, protože se udusily z nedostatku kyslíku v jamce – zajímavý jev, který jsme objevili právě při tomto pokusu. (Fotka dusící se svíčky)

## Závěr

Paradox plovoucí svíčky je skutečně těžko uvěřitelný fyzikální fenomén.

V naší práci přicházíme s jednoduchým, intuitivním vysvětlení pomocí hustoty celého tělesa, která v čase klesá. Na základě tohoto vztahu jsme vytvořili předpověď výšky okraje svíčky nad hladinou  $h(t)$ , která sama o sobě říká naprosto fenomenální věc: totiž že svíčka se bude postupně vynořovat nad hladinu. Tuto predikci jsme ověřili experimentem, který jí více než uspokojivě odpovídá.

Zabývali jsme se bližším výzkumem tvaru jamky okolo knotu. Zde jsme využili a dále rozvinuli teoretický model prezentovaný S. Theodorakisem a C. Aristidouem v jejich práci [1]. Tento náš upravený model jsme taktéž velice uspokojivě ověřili téměř 14-hodinovým experimentem, kterým jsme také prozkoumali ostatní parametry jamky. Zjistili jsme, že postupem času hloubka roztaveného parafínu pod knotem zůstává konstantní, zatímco hloubka celé jamky a její poloměr dosáhnou lineárního růstu. Ač na počátku poloměr roste rychleji než hloubka, asymptota hloubky roste rychleji než asymptota poloměru.

Zabývali jsme se také tvarem jamky u menších svíček, které jsme zkoumali pomocí invazivní a neinvazivní metody.

Nejzajímavěji se systém chová u svíček s velmi malým poloměrem, kdy se roztaví parafín na okrajích. Místo, aby ztekl dolů a tím způsobil vtečení vody do jamky, parafín je tažen povrchovou silou vzhůru a vytváří zvláštní útvary na vodní hladině. Tento jev jsme vysvětlili a podložili mnohými fotografiemi. Podařilo se nám zjistit, u jak velkých svíček se tento jev děje a jak závisí na teplotě okolní vody.

Svíčka je tedy skutečně věčně plovoucí, může však zhasnout až třemi způsoby:

- a. **Překlopením** – poloměr svíčky je extrémně velký, takže se okraje svíčky nikdy neroztaví a svíčka se tak dlouho vynořuje, až se převrhne a spadne do vody. Tento jev jsme nepozorovali, odhadem by se mohl jít pro poloměr větší než 10 cm.
- b. **Vniknutím vody** – poloměr svíčky je dostatečně malý, aby se začal tvořit parafinový kotouč, do kterého může vniknout voda a tím svíčku zhasit. Tento jev jsme pozorovali pro téměř všechny svíčky s poloměrem menším než 0,55 cm.
- c. **Udušením** – děje se pro svíčky s malým poloměrem po dlouhé době, kdy je jamka příliš hluboká, než aby do ní mohlo proudit dostatek kyslíku. Tento jev jsme výjimečně pozorovali pro svíčky s poloměrem menším než 0,45 cm.

## Literatura

[1] S. Theodorakis and C. Aristidou. The paradox of the floating candle that continues to burn. *Am. J. Phys.* 80, 657-663 (2012)

[2] A. P. Hamins, M. F. Bundy, and S. E. Dillon. Characterization of candle flames. *J. Fire Protection Eng.* 15, 4, 265-285 (2005), <http://fire.nist.gov/bfrlpubs/fire05/PDF/f05141.pdf>

[3] The Engineering ToolBox, [https://www.engineeringtoolbox.com/water-surface-tension-d\\_597.html](https://www.engineeringtoolbox.com/water-surface-tension-d_597.html)