TMF 2017 - Problem n. 3: Single Lens Telescope

Tým Gymnázia Christiana Dopplera

31. ledna 2017

Obsah

1 Zadání **3**
1.1 Originální znění . . . 3
1.2 Oficiální překlad . . . 3

2 Úvod **4**

3 Teleskop **4**

4 Dírková komora **4**

5 Implementace **4**

6 Zkoumané parametry **4**
6.1 Zvětšení . . . 5
6.2 Zorný úhel . . . 5
6.3 Jas obrazu . . . 6
6.4 Ostrost obrazu . . . 7

7 Experimenty **8**
7.1 Naše konstrukce . . . 8
7.2 Ověření parametrů . . . 8

8 Závěr **11**

9 Použité zdroje **12**
9.1 Použitá literatura . . . 12
9.2 Internetové zdroje . . . 12
9.3 Použité obrázky . . . 12
9.4 Použité rovnice . . . 12

1 Zadání

1.1 Originální znění

A telescope can be built using a single lens, provided that a small aperture is used instead of an eyepiece. How do the parameters of the lens and the hole influence the image (e.g. magnification, sharpness and brightness)?

1.2 Oficiální překlad

Dalekohled můžeme sestrojit s pomocí jediné čočky, pokud nahradíme okulár malou aperturou. Jak parametry čočky a otvoru ovlivní obraz (např. zvětšení, ostrost a jas)?

2 Úvod

Klasickým případem dalekohledu jsou dalekohledy tvořené alespoň dvěma čočkami. V našem případě je však dalekohled tvořen jen jednou čočkou a dírkou. V klasickém prostředí není tento koncept dalekohledu úplně nejvhodnější, respektive není důvod ho běžně používat. Zajímavé by bylo využít jej pro záření v jiných částech spektra než je viditelná. Vyřešilo by to obtížnou náhradu okulárové čočky v teleskopu v rentgenové oblasti.

3 Teleskop

Teleskop, neboli dalekohled, je optické zařízení. Patří mezi subjektivní optické přístroje, je ovlivněn schopnostmi pozorovatele a je charakterizován svým úhlovým zvětšením. Toto zařízení je sestaveno ze dvou hlavních částí, těmi jsou objektiv a okulár.

Teleskopy můžeme dělit dle mnoha parametrů, nás však zajímá rozdělení čočkových dalekohledů na Galileův a Keplerův dalekohled.

- Keplerův (hvězdářský) dalekohled - sestává ze dvou spojných čoček, tímto dalekohledem vidíme sledovaný předmět převrácený a úhlově zvětšený
- Galileův (pozemský) dalekohled - je tvořen spojnou čočkou a rozptylkou, vidíme sledovaný předmět nepřevrácený a úhlově zvětšený

4 Dírková komora

Dírková komora, latinsky *camera obscura*, je jedna z prvních fotografických a optických metod, která funguje bez čoček, pouze na principu průchodu paprsků skrz otvor s malým poloměrem. Dírka musí být vytvořena v materiálu s dobrou odrazivostí, aby bylo zamezeno průchodu nežádoucího světla do komory. Na výrobu se proto používá například hliníkové folie. Základní charakteristikou dírkové komory je průměr dírky a s ním související jas obrazu, protože čím menší dírka bude, tím méně světla projde. Taktéž s průměrem souvisí ostrost výsledného obrazu, bude-li dírka vélká, je každý bod veliký jako samotná dírka. Může dojít k překryvům více bodů a následné neostrosti. Naopak když bude otvor velmi malý, ostrost se začne zhoršovat díky difrakci (ohybovému jevu) a začnou nám vznikat difrakční obrazce za dírkou.

5 Implementace

Námi zkoumaný dalekohled má objektiv tvořený jednou spojnou čočkou. Čočka je pro charakterizována svým průměrem a ohniskovou vzdáleností. Okulár je u tohoto dalekohledu tvořen dírkou. Dírkou pozorujeme obraz vytvořený v ohniskové rovině. Tato dírka funguje na principu tzv. dírkové komory. Dírka je charakterizována svým průměrem a vzdáleností od ohniska čočky. Spojné čočky soustředí rovnoběžné paprsky na ohniskovou rovinu, která se nachází v určité ohniskové vzdálenosti *f*. Jestliže dáme okulár za ohniskovou rovinu, celková vzdálenost okuláru od čočky bude $l = f + a$ (a je vzdálenost dírky od ohniska) bude obraz převrácený. Dostáváme model Keplerova (hvězdářského) dalekohledu. Naopak pokud bude vzdálenost okuláru od čočky $l = f - a$, kde $f > a$ bude obraz přímý. Dostáváme model Galileova (pozemského) dalekohledu.

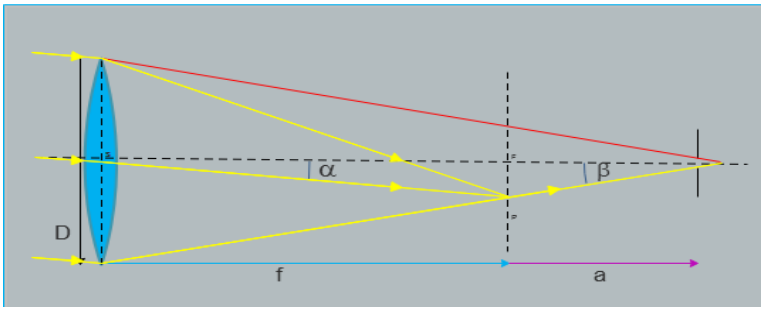
6 Zkoumané parametry čočky a dírky

U zkoumaného dalekohledu si určíme zkoumané parametry, tedy základní parametry dalekohledu, jako je zvětšení a zorný úhel a budeme řešit, jakým způsobem je můžeme ovlivnit. Budeme zkoumat

i parametry viděného obrazu, jako jeho ostrost a jas, a jak můžou být tyto dva parametry ovlivněny.

6.1 Zvětšení

Zvětšení je základní parametr dalehohledu a dalekohled je tímto parametrem charakterizován. Základní definice tohoto parametru obecně pro dalekohledy je úhlové zvětšení $\gamma = \frac{\tau'}{\tau}$ kde τ' je zorný úhel, pod kterým předmět vidíme přes dalekohled, τ je zorný úhel, pod nímž vidíme předmět pouhým okem. V námi zkoumaném případě si definici zvětšení poupravíme. Představme si, že ve velké vzdálenosti, popř. v nekonečnu, máme hvězdu, svítící bod, a nedíváme se na něj přímo. K představě nám nejlépe pomůže níže daný obrázek (Obr. 1). Ve kterém α je úhel přicházejících paprsků a β je úhel vystupujících paprsků.



Obrázek 1: Zvětšení

Vznikly nám dva trojúhelníky se základnami v rovině ohniskové roviny. Pro úhlové zvětšení musí platit, že poměr úhlů β a α je úhlové zvětšení, tedy, že $Z \cong \frac{\beta}{\alpha} = \frac{|FP|}{a} : \frac{|FP|}{f}$ Pak platí, že

$$Z = \frac{f}{a} \tag{1}$$

kde a je vzdálenost dírky od ohniska a f je ohnisková vzdálenost čočky. Zvětšení závisí na těchto dvou hodnotách a můžeme pro jednu čočku mít dalekohled s velkou varietou zvětšení dle toho, jak daleko bude dírka. Zaveďmě si ještě to, že pokud bude dírka za ohniskovou rovinou bude a záporné, jestliže bude před ohniskovou rovinou bude a kladné. Pro Galileův model budeme mít zvětšení s kladným znaménkem a pro Keplerův se záporným znaménkem.

6.2 Zorný úhel

Zorný úhel je úhel, který můžeme daným optickým zařízením zachytit, ať už je to oko či dalekohled. Zorný úhel našeho teleskopu budeme definovat tak, jak je naznačeno na obrázku (Obr. 2). Bude to úhel rovnoramenného trojúhelníku u hlavního vrcholu, který je ve středu čočky. Ramena tohoto troúhelníku jsou tvořena paprsky předmětu, který ještě teleskopem uvidíme. Tento úhel označíme φ, jako na obrázku. Se znalostmi parametrů vyznačených na obrázku (Obr. 2) dostáváme, že zorný úhel je

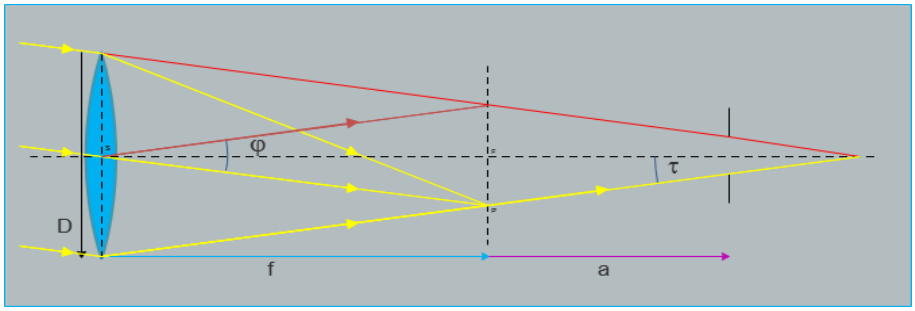
$$\varphi = 2 \cdot \arctan \frac{a \cdot \tan \frac{\tau}{2}}{f} = 2 \cdot \arctan \frac{a \cdot D}{2f \cdot (f + a)} \tag{2}$$

kde a je vzdálenost dírky od ohniska, f je ohnisková vzdálenost, D je průměr vstupní pupily, τ je úhel, který můžeme z dírky vidět a φ je skutečný zorný úhel.

Pro malé úhly, což tyto úhly jsou, předpokládáme, že velikost úhlu odpovídá velikosti argumentu arctan. Můžeme psát

$$\varphi = \frac{a \cdot D}{f \cdot (f + a)} \tag{3}$$

Velikost nám pak vyjde v radiánech.



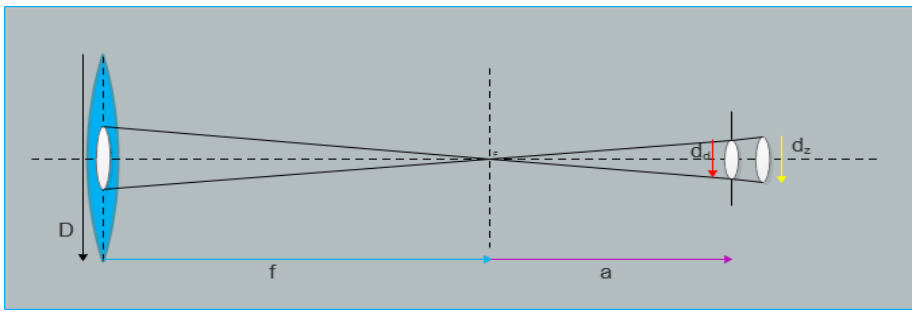
Obrázek 2: Zorný úhel

6.3 Jas obrazu

Jestliže se díváme na nějaký předmět (hvězdu) okem, paprsky světla z tohoto předmětu nám osvětlují oko popř. jiný detektor. Nezachytíme však veškeré paprsky, jelikož je sítnice cloněna vstupní pupilou oka, tj. zorničkou popř. clonou detektoru. V jistém prostorovém úhlu, daném parametry pozorovaných objektů a zobrazovací soustavy, nám na detektor dopadá nějaká energie. Tuto energii v radiometrii označujeme jako zářivý tok, ve fotometrii, kde je započítána citlivost detektoru je to veličina světelný tok. Zaveďme si dvě veličiny: 1. jas jednoho bodu (hvězdy) 2. jas plochy.

1. Jas jednoho bodu (hvězdy). Vezmeme si krajní paprsky, které projdou dírkou, ty vytnou na vstupní čočce plochu, která je základnou nějakého kužele, viz obr. 3. Jelikož jsou si tyto trojúhelníky podobné získáváme poměr $k_1 = \frac{\pi}{\pi} \cdot \left(\frac{r_d}{r_d}\right)^2 \cdot \left(\frac{f}{a}\right)^2 = \left(\frac{f}{a}\right)^2 = Z^2$ kde f je ohnisková vzdálenost a a je vzdálenost dírky od ohniskové roviny a r_d je poloměr dírky. Za dírkou paprsky projdou do detektoru. Průměr dírky je vždy, aby byl obraz ostrý (viz níže), menší než průměr pupily detektoru. Protože paprsky procházejí skrz celou plochu vezmeme tedy poměr plochy dírky ku ploše pupily detektoru $k_2 = \frac{\pi r_d^2}{\pi r_z^2} = \left(\frac{r_d}{r_z}\right)^2$ kde r_d je poloměr dírky a r_z je poloměr pupily detektoru. Celkově definujeme jas bodu jako

$$J_B = Z^2 \cdot \left(\frac{r_d}{r_z}\right)^2 \tag{4}$$



Obrázek 3: Jas

2. Jestliže budeme pozorovat místo bodu plochu, musíme výraz pro jas jednoho bodu zmenšit tolikrát, kolikrát se zobrazením plocha zvětší, druhou mocninou zvětšení. Zadefinujeme nějakou jasnost plochy J_P jako

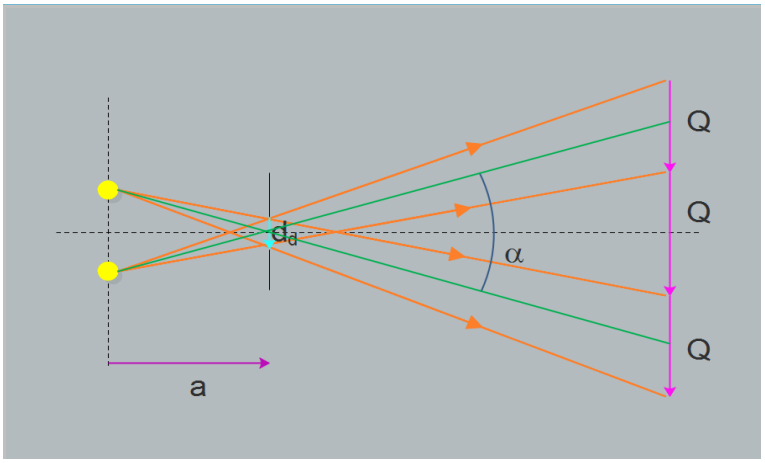
$$J_P = Z^2 \cdot \left(\frac{d_d}{d_z}\right)^2 \cdot \frac{1}{Z^2} = \left(\frac{d_d}{d_z}\right)^2 \tag{5}$$

6.4 Ostrost obrazu

Ostrost obrazu, spíše úhlovou rozlišitelnost dvou bodů, budeme popisovat dvakrát: jednou ji popíšeme geometricky a jednou jí popíšeme vlnově.

1. Pro geometrickým popis si představme ohniskovou rovinu jako množinu zářících bodů. Vezměme si dva nappříklad symetricky umístěné body vzhledem k optické ose. Z těchto dvou bodů prochází světlo skrz dírkovou komoru v určitém kuželu a na desce umístěné v nekonečnu nám vytváří osvětlené kruhy o průměru Q (Obr. 4). Stanovme si, že rozeznáme tyto dva body, jestliže vzdálenost mezi kraji těchto kruhů bude také vzálenost Q, viz obr. Z těchto trojúhelníků dostáváme, že $\alpha_z = 2 \cdot \frac{d_d}{a}$ kde a je vzdálenost dírky od ohniskové roviny a d_d je průměr dírky Vezmeme-li toto v úvahu, a také to, že chceme tento úhel vyjádřit jako úhel před čočkou. Budeme tento mezní úhel za čočkou dělit zvětšením teleskopu. Dostáváme

$$\alpha = 2 \cdot \frac{d_d}{a \cdot Z} \tag{6}$$



Obrázek 4: Úhlové rozlišení

2. Pro vlnový popis úhlové rozlišitelnosti je známý vzorec

$$\beta = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{d_d} \tag{7}$$

kde číslo 1,22 je empirická konstanta, λ je vlnová délka světla a d_d je průměr dírky. Tuto situaci nazýváme jako Airyho disk. Jestliže budeme chtít tento úhel dostat z úhlu za čočkou na úhel před čočkou, vydělíme tento úhel zvětšením dalekohledu. Dostáváme

$$\beta_p = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{d_d \cdot Z} \tag{8}$$

Pokud dáme výše zmíněné vzorce do rovnosti, tedy

$$\beta_p = \alpha$$

Dostaneme vyjádření pro mezní hodnotu průměru, která bude hraniční hodnota pro difrakci. Po dosazení vzorců za úhly z vyjádření hodnoty d_d dostáváme

$$d_d = \sqrt{1,22 \cdot \frac{a\lambda}{2}} \tag{9}$$

7 Experimenty

V této části se podíváme na konstrukci teleskopu, kterou jsme vytvořili, podíváme se na obrazy, které uvidíme. Budeme vycházet ze vztahů, které jsme napsali, popř. odvodili, v teoretické části. Budeme uvádět hodnoty zvětšení, zorného úhlu, jasu a budeme komentovat ostrost obrazu. Budeme používat jednu čočku s danými parametry, viz níže. A vyzkoušíme několik průměrů dírky a obrazy budeme zachytávat fotoaparátem.

7.1 Naše konstrukce

Náš jednočočkový dalekohled bude tvořen čočkou o průměru $D = 6$ cm a ohniskovou vzdáleností $f = 32$ cm. Abychom měli dírku vždy v optické ose, uchytíme na okraj čočky tři tyčky, které jsou opatřeny závitem, a tyto tyčky opatříme měřítkem. Na tyto tyče umístíme posuvnou aparaturu pro uchycení fotoaparátu a dírky (Obr. 5). Posouvání bude možné díky závitům na tyčkách a převlečných maticích (Obr. 6), na kterých je umístěn systém uchycení dírky a fotoaparátu, budeme schopni pohodlně měnit vzdálenost dírky od ohniska a velikost dírky. A tím i některé výše zmíněné parametry. Systém pro uchycení fotoaparátu vytvoříme tak, aby byla čočka fotoaparátu co nejblíže dírce, a aby nám do ní nepronikalo odražené světlo od vnější plochy sytému uchycení. Zde na obrázku je ukázka naší konstrukce (Obr. 5).

Obrázek 5: Teleskop

Obrázek 6: Uchycení - převlečné matice

7.2 Ověření parametrů

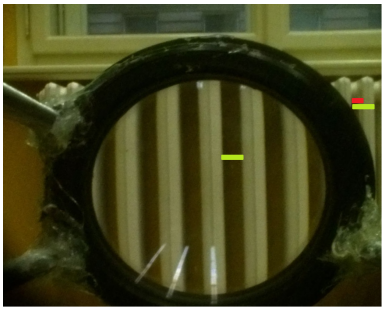
V celé experimentální části se budem zabývat dvojicíc zvětšení, a to čtyřnásobným a dvojnásobným. Můžeme si pro tyto dvě možnosti spočítat velikost zorného úhlu. Výše jsme odvodili tvar vzorce zorného úhlu $\varphi = \frac{a \cdot D}{f \cdot (f+a)}$. Dosadíme do něj parametry ohniskové vzdálenosti čočky $f = 32$ cm, délky a pro dvojnásobné zvětšení $a_{2x} = 16$ cm a čtyřnásobné $a_{4x} = 8$ cm. Tyto hodnoty plynou ze vzorce $Z = \frac{f}{a}$.

Zorný úhel pro dvojnásobné zvětšení je $\varphi = \frac{16 \cdot 6}{2 \cdot 32 \cdot (32+16)} = 0,0625 rad = 3,581°$ a pro čtyřnásobné zvětšení dostáváme hodnotu $\varphi = 0,0375 = 2,149°$.

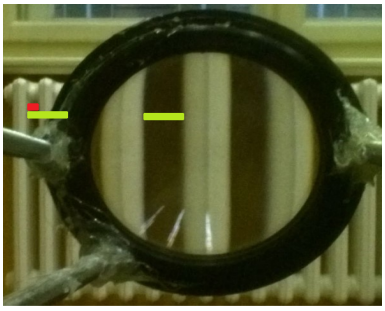
Pro níže zmíněné experimenty k ověření parametrů jsme využili dírku o průměru $d_d = 0,6$ mm. Tu jsme vytvořili pomocí hřebíčku s definovaným průměrem 0,6 mm od výrobce.

Prvním experimentem ověříme velikost zvětšení. Zvětšení ověřujeme pomocí toho, že pozorujeme svislé příčky, které jsou od sebe vzdáleny danou délku l. Pozorovali jsme přes teleskop topení s danou vzdáleností a velikostí příček $l = 3$ cm. V obrázcích je graficky naznačena délka příček l zeleně pro obraz v teleskopu a červeně pro obraz bez teleskopu. První obrázek je pro dvojnásobné (Obr. 7) a druhý pro čtyřnásobné zvětšení (Obr. 8).

Se známým průměrem dírky jsme schopni spočítat jasnost plochy. Jasnost plochy jsme výše definovali jako $J_P = \left(\frac{d_d}{d_z}\right)^2$. K pozorování jsme použili fotoaparát s průměrem vstupní pupily $d_z = 3$ mm.



Obrázek 7: 2x



Obrázek 8: 4x

Dostáváme, že jas je $J_P = \left(\frac{0,6}{3}\right)^2 = \frac{1}{25}$.

První experiment s jasem jsme provedli v přírodě, pozorovali jsme plochy, zejména pak plochu značky. Kdybychom fotili bez teleskopu mohli bychom využít rychlost závěrky kolem $t_{zb} = 1/640$. Dle velikosti jasu vypočtené dle vzorce (5) jsme uzpůsobili rychlost závěrky na $t_s = 1/20$ s. Tu jsme využili, protože náš fotoaparát nemá rychlost závěrky $t_{st} = 1/25$ s - teoretická vypočtená hodnota dle vzorce (5) a $t_{zb} = 1/640$. Níže uvedené obrázky jsou v pořadí pro $a = -16$ cm (Obr. 9), $a = -8$ cm (Obr. 10) a $a = 8$ cm (Obr. 11).

Obrázek 9: 2x

Obrázek 10: 4x za

Obrázek 11: 4x před

V druhém experimentu s jasem jsme pozorovali čistě jeden bod světla, ten byl simulován umístěním bodového světla před teleskop. Teleskop jsme měli nastavený na čtyřnásobné zvětšení. Dle našeho naše předpokladu bychom měli vidět tento bod jasněji přes teleskop než bez něj. Tento předpoklad jsme potvrdili, jak je možno vidět na následujících obrázcích - první je focen s teleskopem (Obr. 12), druhý pak bez teleskopu (Obr. 13). Teleskop byl nastaven na čyřnásobné zvětšení.

Obrázek 12: S teleskopem

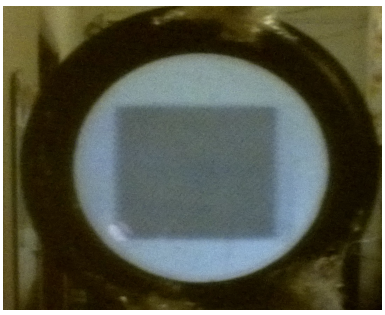
Obrázek 13: Bez teleskopu

V teoretické části jsme řešili ostrost obrazu. Vypočítali jsme dle odvozeného vzorce $d_d = \sqrt{1,22 \cdot \frac{a\lambda}{2}}$ hraniční hodnoty průměru dírky pro a takové, abychom měli čtyřnásobné zvětšení. Průměr dírky bude $d_d = \sqrt{1,22 \cdot \frac{0,08 \cdot 5,5 \cdot 10^{-7}}{2}} = 0,16$ mm.

Dírku jsme vytvořili pomocí hřebíčku s definovaným průměrem 0,2 mm, abychom se co nejvíce přiblížili teoretické hodnotě mezní hranice. Dál jsme vypočetli dle vzorce $\alpha = 2 \cdot \frac{d_d}{a \cdot Z}$ úhel α, když $a = 8$ cm, $Z = 4$ a $d_d = 0,2$ mm. Dostali jsme hodnotu $\alpha = 0,00125rad = 0,072°$. S touto hodnotou spočítáme pomocí dané vzdálenosti pozorované mříže $p = 4$ m, velikost rozteče mříže. Z pravúhlého trojúhelníku, který tyto délky a úhel tvoří. Vypočítáme, že velikost rozteče n $n = 800 \cdot \tan 0,00125 = 1$ cm.

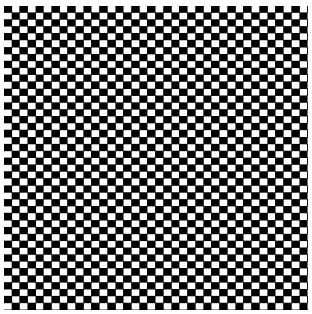
Vytořili jsme takovouto síť a pozorovali jsme jí teleskopem s výše zmíněnými parametry a $d_d = 0,2$ mm a obraz zachytili na fotoaparát. Uvádíme obrázek mříže, fotky mříže z teleskopou ze vzdálenosti 4 metrů (Obr. 14) a fotky mříže z teleskopu ze vzdálenosti 8 metrů (Obr. 15).

Obrázek 14: 4 metry



Obrázek 15: 8 metrů

Zde ještě uvádíme obrázek naší mříže (Obr. 16), kterou jsme vytvořili tak, aby se střídala černá a bílá barva a my mohli lépe rozlišovat body od sebe.



Obrázek 16: Mříž

8 Závěr

Dle zadání úlohy jsme sestavili jednočočkový teleskop, u kterého jsme schopni měnit Keplerovo a Galileovo rozestavení. Prozkoumali jsme parametry, které ovlivňují zvětšení, zorný úhel, jas obrazu a ostrost. Námi odvozené vztahy pro jas či zorný úhel (viz teoretická část) platí pro a kladné i záporné, jde jen o znaménkovou konvenci.
Můžeme zkonstatovat, že zvětšení dalekohledu závisí na velikosti ohniskové vzdálenosti čočky a vzdálenosti dírky od ohniskové roviny, dle vztahu $Z = \frac{f}{a}$, pro a záporné pak máme záporné znaménko, tzn. převrácený obraz.
Zorný úhel dalekohledu pak závisí na velikosti ohniskové vzdálenosti čočky, vzdálenosti dírky od ohniskové roviny a velikosti průměru vstupní čočky, dle vztahu $\varphi = \frac{a \cdot D}{f \cdot (f+a)}$.
Jas jsme rozdělili na dvě situace, pro pozorování bodu platí $J_B = Z^2 \cdot \left(\frac{r_d}{r_z}\right)^2$ a pro pozorování plochy platí $J_P = \left(\frac{d_d}{d_z}\right)^2$. Jas tedy závisí na poměru průměrů dírky a pupily detektoru, případně pak i na zvětšení.
Ostrost jsme definovali, jako úhlovou rozlišitelnost bodů, kde nejlepší obraz získáme, když se budeme průměrem dírky blížit hranici s difrakčními jevy. Sestavili jsme vzorec pro mezní hodnotu tohoto průměru: $d_d = \sqrt{1,22 \cdot \frac{a\lambda}{2}}$.

V experimentální části jsme kromě sestavení teleskopu provedli ověření velikosti zvětšení a jasu, kde jsme provedli experiment s pozorováním svítícího bodu a pozorování plochy. Spočítali jsme zorné úhly našich konfigurací. A provedli jsme pozorování s dírkou blížící se hranici difrakce.
Vztahy pro zvětšení, jasnost obrazu a rozlišení byly experimentálně potrvzeny.

9 Použité zdroje

9.1 Použitá literatura

[1] Vyšín, I., Říha, J.: Paprsková a vlnová optika. UPOL, Olomouc, 2012
[2] Ponec, J.: Optické přístroje 1. UPOL, Olomouc, 2011
[3] Young, M.: The Pinhole Camera. TPT, Colorado, 1989

9.2 Internetové zdroje

[*A*] Reichl, J., Všetička, M.: Encyklopedie fyziky - Dalekohled online: http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/5
dalekohled
[*B*] https://cs.wikipedia.org/wiki/%C4%8Co%C4%8Dka_(optika)

9.3 Použité obrázky

Všechny použité obrázky jsou vlastnictvím autora.

9.4 Použité rovnice

Rovnice (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) a (9) jsou odvozené.
Rovnice (8) byla převzata ze zdroje [1].